

Modelo de 2026

Resolvemos las dos opciones de cada apartado y las cuatro cuestiones de probabilidad.

Problema 1 · Producción, matrices y entradas

A) Sean x, y las unidades de frigoríficos A y B. Las horas de montaje y pintura limitan la producción mediante

$$3x + y \leq 100, \quad x + 2y \leq 100, \quad x, y \geq 0.$$

El beneficio $G = 500x + 400y$ es lineal. Los vértices factibles son $(0, 0)$, $(100/3, 0)$, $(20, 40)$ y $(0, 50)$; los beneficios correspondientes son 0, 50000/3, 26000 y 20000 €. El mayor se alcanza en $(20, 40)$.

$20 \text{ frigoríficos A y } 40 \text{ B; } G_{\max} = 26000 \text{ €}.$

B) Con las matrices del enunciado, $M = AB^tC - D$ se calcula en ese orden:

$$AB^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad AB^tC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Su determinante es -3 , por lo que es invertible y $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$. Al elevar al cuadrado, $M^2 = 3I$; así

$M^8 = (M^2)^4 = 81I$. Además, $CC^t = 5$ es invertible, mientras que $C^tC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ tiene determinante cero.

Para la ecuación del apartado e), si $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, aislamos X :

$$XE^t = (C^tB)^t - A^t \implies X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}; \quad M^2 = 3I, \quad M^8 = 81I; \quad X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$

Problema 2 · Funciones

A) La función es

$$f(x) = \begin{cases} (1+x^2)/(1+x), & 0 \leq x < 4, \\ 2x+4, & 4 \leq x < 8, \\ 3x+60-x^2, & 8 \leq x \leq 9. \end{cases}$$

En $x = 4$ hay un salto, pues los límites son $17/5$ y 12 ; en $x = 8$ las dos ramas valen 20 y la función es continua. En el primer tramo,

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}, \quad x = \sqrt{2} - 1$$

es el único punto crítico del intervalo. La función decrece hasta ese valor y después crece hasta $x = 4$. El segundo tramo crece y el tercero decrece. Comparando el punto crítico, el punto de unión $x = 8$ y los extremos, el mínimo absoluto es $2\sqrt{2} - 2$ en $x = \sqrt{2} - 1$ y el máximo es 20 en $x = 8$.

$$A = \int_8^9 (3x + 60 - x^2) dx = \left[\frac{3x^2}{2} + 60x - \frac{x^3}{3} \right]_8^9 = \frac{79}{6},$$

pues en ese intervalo la función está por encima del eje X .

$\text{Discontinuidad de salto en } 4; \quad \min f = 2\sqrt{2} - 2; \quad \max f = 20; \quad A = \frac{79}{6}.$

B) $Q(x) = 30x^2 + Ax + B - x^3$ alcanza un máximo interior en $x = 21$, de modo que $Q'(21) = 0$. Así,

$$Q'(x) = 60x + A - 3x^2, \quad Q'(21) = 0 \implies A = 63.$$

La condición $Q(21) = 5300$ proporciona $B = 8$. La derivada factoriza como $-3(x - 21)(x + 1)$, positiva en $[10, 21)$ y negativa en $(21, 30]$. Para ver si la producción puede bajar de 1000 kg, comprobamos el mínimo en los extremos: $Q(10) = 2638$ y $Q(30) = 1898$, ambos mayores que 1000.

$$A = 63, \quad B = 8; \quad Q \text{ crece en } [10, 21] \text{ y decrece en } [21, 30]; \quad Q(x) > 1000.$$

Problema 3 · Distribuciones binomial y normal

Sea X el número de canicas blancas. Cada canica es blanca con probabilidad $p = 0,6$, independientemente de las demás; por ello $X \sim \text{Bin}(n, 0,6)$.

a) Con seis canicas, el mismo número de blancas y rojas significa exactamente tres blancas:

$$P(X = 3) = \binom{6}{3} (0,6)^3 (0,4)^3 = \frac{864}{3125} = 0,27648.$$

b) Para $n = 100$, la binomial se aproxima mediante una normal con media $np = 60$ y desviación típica $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{24}$. Con corrección de continuidad,

$$P(X \geq 57) \approx P\left(Z \geq \frac{56,5 - 60}{\sqrt{24}}\right).$$

El valor tipificado es aproximadamente $-0,71$; con la tabla normal,

$$P(X \geq 57) \approx P(Z \geq -0,71) = \Phi(0,71) \approx 0,7611.$$

c) Si $W \sim N(10, 0,04)$, su desviación típica es 0,2 g. Estandarizando los extremos:

$$P(9,95 < W < 10,15) = P(-0,25 < Z < 0,75) = \Phi(0,75) - \Phi(-0,25) \approx 0,3721.$$

d) Para las canicas rojas, $R \sim N(11, 0,09)$ tiene desviación típica 0,3 g. El percentil 87,7 corresponde aproximadamente a $z = 1,16$:

$$r = 11 + 1,16(0,3) = 11,348 \text{ g.}$$

$$P(X = 3) = 0,27648; \quad P(X \geq 57) \approx 0,7611; \quad P(9,95 < W < 10,15) \approx 0,3721; \quad r \approx 11,348 \text{ g.}$$