

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria ordinaria de 2025

Se desarrollan todas las alternativas del examen. En la prueba basta con contestar a las opciones que se elijan.

Pregunta 1 - Sistemas y matrices

1.1) Número de lanzamientos de cada tipo

Sean x , y y z los lanzamientos intentados de uno, dos y tres puntos, respectivamente. La puntuación anotada con cada tipo de lanzamiento se obtiene multiplicando el número de intentos por el porcentaje de acierto y por el valor de la canasta. Por tanto,

$$0,8x + 2 \cdot 0,5y + 3 \cdot 0,4z = 80,$$

es decir,

$$0,8x + y + 1,2z = 80.$$

El segundo dato relaciona los lanzamientos de dos puntos con el resto, $x + z$:

$$\frac{y}{3} = \frac{x + z}{5} \implies 5y = 3x + 3z.$$

Además, el doble de los lanzamientos de tres puntos es cinco unidades menor que el resto, $x + y$:

$$x + y - 2z = 5.$$

Resolvemos el sistema. Multiplicamos la primera ecuación por 5 y usamos $5y = 3x + 3z$:

$$4x + 5y + 6z = 400 \implies 7x + 9z = 400.$$

En la tercera ecuación sustituimos $y = \frac{3}{5}(x + z)$:

$$x + \frac{3}{5}(x + z) - 2z = 5 \implies 8x - 7z = 25.$$

Así obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 7x + 9z = 400, \\ 8x - 7z = 25. \end{cases}$$

Multiplicamos la primera igualdad por 8 y la segunda por 7 para eliminar x :

$$56x + 72z = 3200,$$

$$56x - 49z = 175.$$

Al restar, $121z = 3025$, luego $z = 25$. De $8x - 7z = 25$ resulta $x = 25$, y entonces

$$y = \frac{3}{5}(x + z) = \frac{3}{5} \cdot 50 = 30.$$

Conclusión. El equipo intentó 25 lanzamientos de un punto, 30 de dos puntos y 25 de tres puntos.

1.2 a) Polinomio característico y raíces reales

Escribimos la matriz $A - \lambda I$ y desarrollamos el determinante por la tercera columna, que contiene dos ceros:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3 - \lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= (2 - \lambda)((4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2) \\ &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 10) \\ &= (2 - \lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 5) \\ &= (2 - \lambda)^2(5 - \lambda). \end{aligned}$$

Las raíces reales son $\lambda = 2$, raíz doble, y $\lambda = 5$. **Conclusión.** $P(\lambda) = (2 - \lambda)^2(5 - \lambda)$, con raíces 2 y 5.

1.2 b) Vector asociado a $\lambda = 5$

Buscamos un vector no nulo en el núcleo de $A - 5I$, por lo que resolvemos $(A - 5I)\vec{v} = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las dos primeras ecuaciones dan $y = x$. La tercera queda $3x + 2x - 3z = 0$, es decir, $5x = 3z$. Elegimos $x = 3$ para obtener $z = 5$, y entonces $y = 3$. **Conclusión.** Un vector que cumple la condición es $\vec{v} = (3, 3, 5)$.

Pregunta 2 - Análisis y áreas

La función $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, pues el coseno admite cualquier argumento. El intervalo del problema es $[0, 12]$. En él, el argumento recorre $[0, 4\pi/3]$.

a) Valores extremos y situación de la curva

El coseno alcanza su máximo, 1, en el argumento 0 y su mínimo, -1 , cuando el argumento es π . Dentro del intervalo considerado, esto ocurre en $x = 0$ y en $x = 9$, respectivamente. Así,

$$f(0) = 3, \quad f(9) = 1.$$

El muro ocupa las alturas entre 0 y 3 metros. Como $1 \leq f(x) \leq 3$ para todo $x \in [0, 12]$, la curva queda completamente dentro del muro. **Conclusión.** El valor máximo es 3 en $x = 0$, el mínimo es 1 en $x = 9$ y la curva está contenida en el muro.

b) Área de cada región

La región inferior está limitada por el eje horizontal y la curva; su área es la integral de f entre los extremos del muro:

$$\begin{aligned} A_{\text{inf}} &= \int_0^{12} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 \right) dx \\ &= \left[\frac{9}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2x \right]_0^{12} \\ &= 24 + \frac{9}{\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ &= 24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \text{ m}^2. \end{aligned}$$

El área total del muro rectangular es $3 \cdot 12 = 36 \text{ m}^2$. La región superior ocupa el resto:

$$A_{\text{sup}} = 36 - A_{\text{inf}} = 12 + \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \text{ m}^2.$$

Conclusión. Las áreas son $24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \text{ m}^2$ en la zona inferior y $12 + \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \text{ m}^2$ en la superior.

c) Botes de spray

El área situada bajo la curva es $A_{\text{inf}} \approx 21,519 \text{ m}^2$. Si cada bote cubre 3 m^2 , se necesitan al menos

$$\frac{A_{\text{inf}}}{3} \approx 7,173$$

botes. Como el número de botes ha de ser entero y siete no cubren toda la superficie, redondeamos al entero siguiente. **Conclusión.** Se deben comprar como mínimo 8 botes de spray.

Pregunta 3 - Geometría en el espacio

La recta r se escribe en paramétricas como

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 0, \\ z = 2 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

de modo que pasa por $P_0 = (1, 0, 2)$ y tiene vector director $\vec{u} = (2, 0, 1)$. El plano $\pi : x + 2y - 3z = 1$ tiene vector normal $\vec{n} = (1, 2, -3)$.

3.1 a) Plano que contiene a r y es perpendicular a π

El vector normal $\vec{m}$ del plano buscado debe ser perpendicular al director de r , porque r está contenido en ese plano. Además, los dos planos son perpendiculares, así que sus vectores normales también son perpendiculares. Un vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{n}$ se obtiene mediante el producto vectorial:

$$\vec{m} = \vec{u} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-2, 7, 4).$$

Usamos este vector normal y el punto P_0 para escribir el plano:

$$-2(x - 1) + 7(y - 0) + 4(z - 2) = 0.$$

Conclusión. Una ecuación del plano es $-2x + 7y + 4z - 6 = 0$.

3.1 b) Recta de π perpendicular a r

La recta buscada corta a r en un punto de π . Hallamos primero la intersección sustituyendo las paramétricas de r en la ecuación del plano:

$$(1 + 2t) + 2 \cdot 0 - 3(2 + t) = 1 \implies -5 - t = 1 \implies t = -6.$$

El punto de corte es $H = (-11, 0, -4)$. La dirección $\vec{m} = (-2, 7, 4)$ es perpendicular tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{n}$, así que define una recta perpendicular a r y contenida en π . Por tanto,

$$\ell : \begin{cases} x = -11 - 2s, \\ y = 7s, \\ z = -4 + 4s, \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. La recta pedida es ℓ en la forma paramétrica anterior.

3.1 c) Puntos de r a distancia $\sqrt{14}$ de π

La distancia de un punto (x, y, z) al plano $x + 2y - 3z - 1 = 0$ es

$$d = \frac{|x + 2y - 3z - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}}.$$

Para un punto de r , $(x, y, z) = (1 + 2t, 0, 2 + t)$, la distancia resulta

$$d(r(t), \pi) = \frac{|(1 + 2t) - 3(2 + t) - 1|}{\sqrt{14}} = \frac{|t + 6|}{\sqrt{14}}.$$

Igualemos a $\sqrt{14}$ y resolvemos:

$$\frac{|t + 6|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \implies |t + 6| = 14 \implies t = 8 \text{ o } t = -20.$$

Al sustituir estos valores en la recta,

$$r(8) = (17, 0, 10), \quad r(-20) = (-39, 0, -18).$$

Conclusión. Los puntos son $(17, 0, 10)$ y $(-39, 0, -18)$.

3.2 a) Distancia de un punto a un plano

Para $P = (0, 1, 1)$ y $\pi : x + y - 2 = 0$, aplicamos la fórmula de distancia punto-plano:

$$d(P, \pi) = \frac{|0 + 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Conclusión. La distancia de P al plano es $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.2 b) Punto Q del plano a esa misma distancia de P

El punto del plano más cercano a P es su proyección ortogonal. Con normal $\vec{n} = (1, 1, 0)$, la proyección de (x_0, y_0, z_0) sobre $x + y - 2 = 0$ se calcula restando

$$\frac{x_0 + y_0 - 2}{1^2 + 1^2 + 0^2} (1, 1, 0)$$

al punto. En este caso,

$$Q = P - \frac{0 + 1 - 2}{2} (1, 1, 0) = (0, 1, 1) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right).$$

Este punto pertenece a π y su distancia a P es $\sqrt{(1/2)^2 + (1/2)^2} = \sqrt{2}/2$. Además, una esfera centrada en P de radio igual a la distancia al plano es tangente al plano; por ello, ese punto de proyección es el único punto del plano que cumple la condición. **Conclusión.** $Q = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1)$.

3.2 c) Área del triángulo

El plano $x + y = 2$ corta a los ejes coordenados en $A = (2, 0, 0)$ y $B = (0, 2, 0)$; no corta al eje z , porque allí $x = y = 0$ y no se cumple la ecuación del plano. El área del triángulo con vértices P, A, B es la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados que parten de P :

$$\vec{PA} = A - P = (2 - 0, 0 - 1, 0 - 1) = (2, -1, -1),$$

$$\vec{PB} = B - P = (0 - 0, 2 - 1, 0 - 1) = (0, 1, -1).$$

Así,

$$\begin{aligned} \text{Area}(PAB) &= \frac{1}{2} \|\vec{PA} \times \vec{PB}\| \\ &= \frac{1}{2} \|(2, 2, 2)\| = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Conclusión. El área del triángulo es $\sqrt{3}$ unidades cuadradas.

Pregunta 4 - Probabilidad

4.1 a) Probabilidad de $(\overline{A - C}) \cap B$

Los sucesos elementales 3 y 7 tienen probabilidad $1/4$ cada uno. Los otros seis resultados comparten la probabilidad restante, por lo que cada uno tiene probabilidad

$$\frac{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{6} = \frac{1}{12}.$$

De $A = \{7, 11, 13, 19\}$ y $C = \{3, 5, 7, 11, 13\}$ se obtiene $A - C = \{19\}$. Su complementario en E es $E \setminus \{19\}$; al intersectarlo con $B = \{2, 5, 7, 13, 17\}$ queda todo B , ya que $19 \notin B$. Sumamos las probabilidades de sus elementos:

$$P((\overline{A - C}) \cap B) = P(B) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}.$$

Conclusión. $P((\overline{A - C}) \cap B) = \frac{7}{12}$.

4.1 b) Probabilidad condicionada a $\overline{C}$

Primero,

$$A \cap B = \{7, 13\}.$$

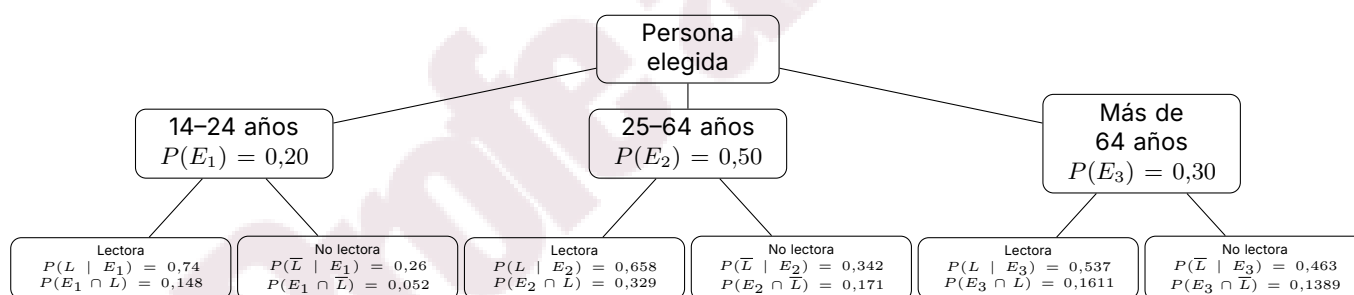
Ambos resultados pertenecen a C , así que $(A \cap B) \cap \overline{C} = \emptyset$. Además, $P(C) = P(3) + P(5) + P(7) + P(11) + P(13) = \frac{3}{4}$, luego $P(\overline{C}) = \frac{1}{4} > 0$ y la probabilidad condicionada está definida. Aplicando su fórmula,

$$P(A \cap B | \overline{C}) = \frac{P((A \cap B) \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{0}{1/4} = 0.$$

Conclusión. $P(A \cap B | \overline{C}) = 0$.

4.2 a) Probabilidad de que una persona sea lectora habitual

Sean E_1 , E_2 y E_3 los sucesos de pertenecer, respectivamente, a los grupos de 14-24, 25-64 y más de 64 años, y sea L el suceso «ser lector habitual». En cada camino se multiplican las probabilidades de sus ramas; las hojas muestran las probabilidades conjuntas.



Sumamos las tres hojas «lectora», que corresponden a casos incompatibles:

$$P(L) = 0,148 + 0,329 + 0,1611 = 0,6381.$$

Conclusión. La probabilidad de que sea lectora habitual es 0,6381, es decir, 63,81 %.

4.2 b) Edad entre 25 y 64 años sabiendo que no es lectora

Buscamos $P(E_2 | \overline{L})$. Por probabilidad condicionada,

$$P(E_2 | \overline{L}) = \frac{P(E_2 \cap \overline{L})}{P(\overline{L})}.$$

El numerador es la proporción del grupo de 25-64 años que no lee habitualmente; el denominador es el complementario del resultado anterior:

$$P(E_2 \cap \overline{L}) = 0,50(1 - 0,658) = 0,171, \quad P(\overline{L}) = 1 - 0,6381 = 0,3619.$$

$$P(E_2 | \overline{L}) = \frac{0,171}{0,3619} = \frac{1710}{3619} \approx 0,4725.$$

Conclusión. La probabilidad pedida es $\frac{1710}{3619} \approx 0,4725$, es decir, 47,25 %.