

Se resuelven las diez preguntas para ofrecer el desarrollo completo de ambas opciones.

Bloque A

Ejercicio A.1 · Ecuación matricial e inversa

Para comprobar la igualdad matricial, calculamos A^2 y lo comparamos con $5A - I$. Con $A = \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}$,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 + 5a^2 & 25a \\ 5a & 5a^2 + 9 \end{pmatrix}, \quad A^2 - 5A = \begin{pmatrix} 5a^2 - 6 & 0 \\ 0 & 5a^2 - 6 \end{pmatrix}.$$

La condición $A^2 - 5A = -I$ equivale a $5a^2 - 6 = -1$, es decir, $a^2 = 1$. Por tanto, $a = 1$ o $a = -1$.

Para $a = -1$, $\det A = 2 \cdot 3 - (-5)(-1) = 1 \neq 0$, así que la inversa existe. Aplicando la fórmula de la inversa de una matriz 2×2 ,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$a \in \{-1, 1\}; \quad A^{-1}|_{a=-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio A.2 · Programación lineal

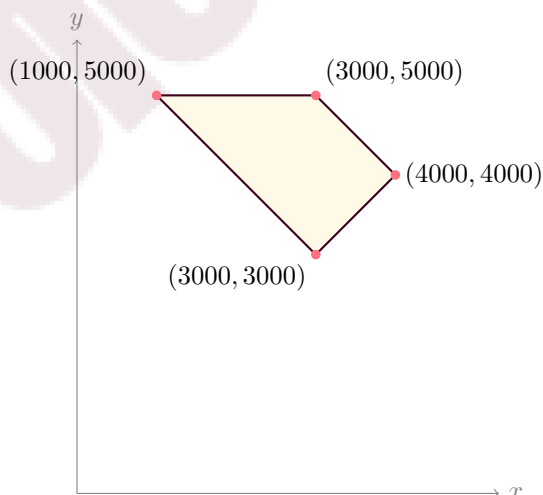
Sean x e y los metros de cable de los modelos A2020 y B2020. El coste total es $C = 2x + 0,5y$. Las condiciones del enunciado se traducen en

$$x + y \geq 6000, \quad y \leq 5000, \quad x + y \leq 8000, \quad y \geq x, \quad x, y \geq 0.$$

Los vértices de la región factible se obtienen intersectando las rectas frontera:

$$(1000, 5000), \quad (3000, 5000), \quad (4000, 4000), \quad (3000, 3000).$$

La figura representa el recinto, limitado por las producciones totales de 6000 y 8000 metros, el máximo de B y la condición $y \geq x$.



Como el coste es una función lineal, su mínimo en un polígono se alcanza en algún vértice. Evaluamos:

(x, y)	$(1000, 5000)$	$(3000, 5000)$	$(4000, 4000)$	$(3000, 3000)$
$C = 2x + 0,5y$	4500	8500	10000	7500

Conviene producir 1000 m del modelo A2020 y 5000 m del B2020; $C_{\min} = 4500$ euros.

Ejercicio A.3 · Continuidad, derivada y área

a) En $x = 1$ deben coincidir el valor de la rama izquierda y el límite de la rama derecha. La primera rama vale $6/(2+1) = 2$, mientras que la segunda tiende a $2m + \ln 1 = 2m$. Por tanto, la continuidad exige $m = 1$. Para $x < 1$, derivamos $6x/(2x^2 + 1)$ mediante la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{6(2x^2 + 1) - 6x(4x)}{(2x^2 + 1)^2} = \frac{6(1 - 2x^2)}{(2x^2 + 1)^2}.$$

b) El recinto está entre $x = -1$ y $x = 0$. En ese intervalo $6x/(2x^2 + 1) \leq 0$, de modo que el área es el opuesto de la integral de la función. Como $\frac{d}{dx} \ln(2x^2 + 1) = \frac{4x}{2x^2 + 1}$,

$$A = - \int_{-1}^0 \frac{6x}{2x^2 + 1} dx = - \left[\frac{3}{2} \ln(2x^2 + 1) \right]_{-1}^0 = \frac{3}{2} \ln 3.$$

$$m = 1; \quad f'(x) = \frac{6(1 - 2x^2)}{(2x^2 + 1)^2} \quad (x < 1); \quad A = \frac{3}{2} \ln 3.$$

Ejercicio A.4 · Operaciones con sucesos

De la probabilidad condicionada se obtiene primero la intersección:

$$P(A \cap B) = P(A | B)P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}.$$

La fórmula de la unión permite calcular el apartado a):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{19}{24}.$$

En el apartado b), los sucesos $A \cap B^c$ y $A^c \cap B$ son incompatibles y juntos representan que ocurre exactamente uno de A, B . Por ello,

$$P((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{2}{24} = \frac{3}{4}.$$

$$P(A \cup B) = \frac{19}{24}; \quad P((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) = \frac{3}{4}.$$

Ejercicio A.5 · Tamaño muestral y distribución normal

a) Para estimar una media con desviación típica conocida, el error máximo es $E = z_{1-\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}$. Para confianza del 95%, $z_{0,975} = 1,96$. La condición $E < 20$ da

$$\frac{1,96 \cdot 60}{\sqrt{n}} < 20 \implies n > (5,88)^2 = 34,5744.$$

El tamaño debe ser entero, así que el mínimo es 35.

b) Interpretamos X como la media de la muestra de 100 patatas: su desviación típica es $60/\sqrt{100} = 6$ g. La tabla normal da $\Phi(2,51) = 0,9940$. Así,

$$\frac{220 - \mu}{6} = 2,51 \implies \mu = 220 - 2,51 \cdot 6 = 204,94 \text{ g.}$$

$$n_{\min} = 35; \quad \mu = 204,94 \text{ g.}$$

Bloque B

Ejercicio B.1 · Discusión y resolución de un sistema

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ a & -4 & -1 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 0 & 1 \\ a & -4 & -1 & 2 \\ 2 & a & -1 & a-4 \end{array} \right).$$

Calculamos

$$\det A = -a^2 + 3a + 4 = -(a-4)(a+1).$$

Si $a \neq 4, -1$, entonces $\text{rg}(A) = 3$ y, por Rouché–Frobenius, el sistema es compatible determinado.

Para $a = 4$, la tercera fila de A es -2 veces la primera más la segunda; la misma combinación de los términos independientes da $-2(1) + 2 = 0$, que coincide con el término independiente de la tercera ecuación ($a - 4 = 0$). Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$ y hay infinitas soluciones (SCI).

Para $a = -1$, la tercera fila de A es tres veces la primera más la segunda, pero la combinación de términos independientes sería $3(1) + 2 = 5$, distinto del valor real $a - 4 = -5$. Así, $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A^*) = 3$; el sistema es incompatible (SI).

En el apartado b), con $a = 3$, resolvemos el sistema. Restando la tercera ecuación de la segunda obtenemos $x - 7y = 3$, y de la primera $x - 3y = 1$. De estas dos ecuaciones, $y = -\frac{1}{2}$ y $x = -\frac{1}{2}$. Sustituyendo en la segunda resulta $z = -\frac{3}{2}$.

$a \neq 4, -1 :$	SCD,
$a = 4 :$	SCI,
$a = -1 :$	SI,
$a = 3 :$	$(x, y, z) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}).$

Ejercicio B.2 · Asíntota, crecimiento y extremos

a) Para una función racional con numerador y denominador del mismo grado, la asíntota horizontal es el cociente de los coeficientes principales. Por tanto, $y = a$ y para que sea $y = -1$ debe ser $a = -1$.

b) Con $a = 1$, el dominio excluye los ceros del denominador:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}.$$

La regla del cociente da

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 5) - 2x(x^2 - 3)}{(x^2 - 5)^2} = -\frac{4x}{(x^2 - 5)^2}.$$

El denominador es positivo en el dominio, así que $f'(x) > 0$ si $x < 0$ y $f'(x) < 0$ si $x > 0$. Separando en los puntos excluidos y en el punto crítico, f crece en $(-\infty, -\sqrt{5})$ y $(-\sqrt{5}, 0)$, y decrece en $(0, \sqrt{5})$ y $(\sqrt{5}, +\infty)$. La derivada cambia de positiva a negativa en 0, por lo que allí hay un máximo relativo, de valor $f(0) = 3/5$.

$a = -1;$	máximo relativo en $(0, \frac{3}{5}).$
-----------	--

Ejercicio B.3 · Recta tangente e integral

El dominio de $f(x) = e^{2x} + x$ es $\mathbb{R}$. La pendiente de la tangente en $x = 0$ es $f'(0)$. Como $f'(x) = 2e^{2x} + 1$, se tiene $f(0) = 1$ y $f'(0) = 3$. Usando la ecuación punto-pendiente,

$$y - 1 = 3(x - 0) \implies y = 3x + 1.$$

Para integrar, integramos por separado la exponencial y el término lineal:

$$\int_0^1 (e^{2x} + x) dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{e^2}{2}.$$

$y = 3x + 1;$	$\int_0^1 f(x) dx = \frac{e^2}{2}.$
---------------	-------------------------------------

Ejercicio B.4 · Probabilidad total y condicionada

Sean A el suceso «el examen es de un alumno» y N el suceso «está escrito en negro». Se tiene $P(N^c) = 2/3$, $P(N) = 1/3$. Como el 70% de los exámenes azules son de alumnas,

$$P(A \cap N^c) = P(N^c)P(A | N^c) = \frac{2}{3}(1 - 0,7) = 0,2.$$

El enunciado da además $P(A \cap N) = 0,2$. Sumando los dos casos incompatibles,

$$P(A) = P(A \cap N^c) + P(A \cap N) = 0,4.$$

Para la condición del apartado b),

$$P(A | N) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{0,2}{1/3} = 0,6.$$

$P(\text{alumno}) = 0,4;$	$P(\text{alumno} \text{negro}) = 0,6.$
---------------------------	--

Ejercicio B.5 · Intervalo de confianza y probabilidad de la media

a) El intervalo es simétrico respecto de la media muestral, que coincide con su punto medio:

$$\bar{x} = \frac{26,9 + 37,1}{2} = 32, \quad E = 37,1 - 32 = 5,1.$$

La confianza 98,92% corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 2,55$. Con $E = z\sigma/\sqrt{n}$ y $\sigma = 10$,

$$5,1 = \frac{2,55 \cdot 10}{\sqrt{n}} \implies \sqrt{n} = 5 \implies n = 25.$$

b) Para $n = 16$, la media muestral tiene media 30 y desviación típica $10/\sqrt{16} = 2,5$. Por tanto,

$$P(25 \leq \bar{X} \leq 35) = P\left(-2 \leq \frac{\bar{X} - 30}{2,5} \leq 2\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 \approx 0,9545.$$

$n = 25, \quad \bar{x} = 32 \text{ min}; \quad P(25 \leq \bar{X} \leq 35) \approx 0,9545.$
--