

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Sistemas matriciales

a) **Determinación de α, β, γ .** Sustituimos $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ en $AX = B$. Igualando las tres componentes con $B = (1, 0, 1)$:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 1, \\ 3\alpha + \gamma = 0, \\ 1 + 2\beta + 3\gamma = 1. \end{cases}$$

De la segunda, $\gamma = -3\alpha$; de la tercera, $2\beta + 3\gamma = 0$, luego $\beta = \frac{9}{2}\alpha$. Al introducir ambas relaciones en la primera queda $\alpha = 1$, y entonces $\beta = \frac{9}{2}$ y $\gamma = -3$. **Conclusión.** $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, \frac{9}{2}, -3)$.

b) **Condición para que el sistema homogéneo sea compatible determinado.** Un sistema cuadrado homogéneo tiene solución única únicamente cuando su matriz de coeficientes es invertible. Con $\beta = \gamma = 1$,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = -\alpha(\alpha - 1).$$

Por tanto, el determinante no se anula cuando $\alpha \neq 0, 1$. **Conclusión.** El sistema es compatible determinado si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

c) **Resolución para $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = 0$.** El sistema queda

$$\begin{cases} -x + y = 1, \\ -z = 0, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Las dos primeras ecuaciones dan $z = 0$ y las otras dos, al sumarlas y restarlas, dan $x = 0$ e $y = 1$. **Conclusión.** $(x, y, z) = (0, 1, 0)$.

Opción A - Ejercicio 2. Simetría, distancia y volumen

a) **Punto simétrico respecto al plano.** Escribimos el plano como $x + 5y - 6z - 1 = 0$. Para $P = (1, 0, 1)$, el valor del miembro izquierdo es $1 + 0 - 6 - 1 = -6$. La reflexión respecto al plano $ax + by + cz + d = 0$ viene dada por

$$P' = P - 2 \frac{ax_P + by_P + cz_P + d}{a^2 + b^2 + c^2} (a, b, c).$$

Aquí el vector normal es $(1, 5, -6)$ y su norma al cuadrado es 62, de modo que

$$P' = (1, 0, 1) - 2 \frac{-6}{62} (1, 5, -6) = \left(\frac{37}{31}, \frac{30}{31}, -\frac{5}{31} \right).$$

Conclusión. El simétrico de P es $P' = \left(\frac{37}{31}, \frac{30}{31}, -\frac{5}{31} \right)$.

b) **Distancia de P a r .** La recta r es el eje OY , formado por los puntos $(0, t, 0)$. La proyección perpendicular de $P = (1, 0, 1)$ sobre esa recta es el origen, por lo que

$$d(P, r) = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}.$$

Conclusión. La distancia es $\sqrt{2}$.

c) **Volumen del tetraedro.** Los cortes del plano con los ejes se obtienen anulando las otras dos coordenadas:

$$X = (1, 0, 0), \quad Y = \left(0, \frac{1}{5}, 0 \right), \quad Z = \left(0, 0, -\frac{1}{6} \right).$$

Para un tetraedro con vértices en el origen y en los tres cortes con los ejes, el volumen es un sexto del producto de las longitudes de las aristas coordenadas, en valor absoluto:

$$V = \frac{|1 \cdot \frac{1}{5} \cdot (-\frac{1}{6})|}{6} = \frac{1}{180}.$$

Conclusión. El volumen es $\frac{1}{180}$ unidades cúbicas.

Opción A - Ejercicio 3. Tangente, inflexión y área

a) La recta tangente en $x = -2$ pasa por el punto de tangencia. Sustituyendo $x = -2$ en $y = 16x + 16$ obtenemos $f(-2) = -16$. La pendiente de la tangente es 16, de modo que $f'(-2) = 16$. Como $x = -2$ es un punto de inflexión y f es dos veces derivable, la segunda derivada en ese punto es nula. **Conclusión.** $f(-2) = -16$, $f'(-2) = 16$ y $f''(-2) = 0$.

b) **Área limitada por $g(x) = x^4 + 4x^3$ y el eje OX .** Factorizamos $g(x) = x^3(x + 4)$, así que los cortes con el eje son $x = -4$ y $x = 0$. En $(-4, 0)$ se tiene $x^3 < 0$ y $x + 4 > 0$, por lo que la gráfica queda bajo el eje OX . El área es el opuesto de la integral:

$$\mathcal{A} = - \int_{-4}^0 (x^4 + 4x^3) dx = - \left[\frac{x^5}{5} + x^4 \right]_{-4}^0 = \frac{256}{5}.$$

Conclusión. El área encerrada es $\frac{256}{5}$ unidades cuadradas.

Opción A - Ejercicio 4. Límites

a) El numerador y el denominador tienden a cero. Aplicamos L'Hôpital dos veces:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2x - e^x + \sin(3x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 - e^x + 3 \cos(3x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x - 9 \sin(3x)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Conclusión. El límite del apartado a) es $-\frac{1}{2}$.

b) Comparamos los términos de mayor grado del numerador y el denominador:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(5x^2 + 2)(x - 6)}{(x^2 - 1)(2x - 1)} = \frac{5}{2}.$$

Conclusión. El límite del apartado b) es $\frac{5}{2}$.

Opción B - Ejercicio 1. Límites y derivabilidad

Para $x \rightarrow +\infty$ se usa la rama $x^2 e^{-x}$, que tiende a cero porque la exponencial decrece más deprisa que cualquier polinomio. Para $x \rightarrow -\infty$ se usa $a + \ln(1 - x)$, que tiende a $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

La función es continua en cada rama. En $x = 0$, el límite por la izquierda vale $a + \ln 1 = a$, mientras que $f(0) = 0$ y el límite por la derecha también vale 0. La continuidad exige $a = 0$.

Derivando en los intervalos de definición,

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{1-x}, & x < 0, \\ e^{-x}(2x - x^2), & x > 0. \end{cases}$$

Para el valor continuo $a = 0$, la derivada lateral izquierda en 0 vale -1 y la derecha vale 0. Si $a \neq 0$, la función no es continua allí y, por ello, no puede ser derivable. En consecuencia, f no es derivable en 0 para ningún a .

Conclusión. Los límites son 0 y $+\infty$ en los extremos indicados; la función es continua en todo $\mathbb{R}$ si $a = 0$, y no es derivable en 0.

Opción B - Ejercicio 2. Posición relativa y construcción de planos

La recta se puede escribir en forma paramétrica tomando $z = t$:

$$r : \begin{cases} x = 1, \\ y = 2 + 2t, \\ z = t, \end{cases} \quad \vec{d} = (0, 2, 1).$$

El plano π tiene normal $\vec{n} = (2, -1, 0)$. Como $\vec{d} \cdot \vec{n} = -2 \neq 0$, la recta corta al plano en un único punto. Sustituyendo su parametrización en $2x - y = 2$:

$$2 - (2 + 2t) = 2 \implies t = -1,$$

y el punto de intersección es $(1, 0, -1)$. **Conclusión.** La recta es secante al plano y lo corta en $(1, 0, -1)$.

b) Plano que contiene a r y es perpendicular a π . Buscamos un vector normal perpendicular tanto a $\vec{d}$ como a $\vec{n}$; el producto vectorial $\vec{n} \times \vec{d} = (-1, -2, 4)$ proporciona uno. Con el punto $(1, 0, -1)$ de r ,

$$-(x-1) - 2y + 4(z+1) = 0,$$

que, multiplicando por -1 , queda $x + 2y - 4z - 5 = 0$. **Conclusión.** El plano pedido es $x + 2y - 4z - 5 = 0$.

c) Recta por A que corta a r y es paralela a π . Sea $R = (1, 2 + 2t, t)$ el punto de corte. El vector director de la recta que une $A = (-2, 1, 0)$ con R debe ser paralelo al plano, es decir, perpendicular a $\vec{n}$:

$$(R - A) \cdot \vec{n} = (3, 1 + 2t, t) \cdot (2, -1, 0) = 5 - 2t = 0.$$

Así, $t = \frac{5}{2}$ y $R = (1, 7, \frac{5}{2})$. El vector $R - A = (3, 6, \frac{5}{2})$ puede multiplicarse por 2 para dar el director entero $(6, 12, 5)$. La recta pedida es

$$\begin{cases} x = -2 + 6\lambda, \\ y = 1 + 12\lambda, \\ z = 5\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Opción B - Ejercicio 3. Inversa de una matriz

La matriz es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Una matriz cuadrada tiene inversa exactamente cuando su determinante es distinto de cero. Calculando,

$$\det A = 5 - 2a^2.$$

Por tanto, A no es invertible si $a^2 = \frac{5}{2}$, es decir, para $a = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$. **Conclusión.** La matriz tiene inversa si $a \neq \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$.

b) Para $a = 2$, la matriz pasa a ser

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det A = -3.$$

La reducción de $[A \mid I]$ por Gauss-Jordan da

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 2 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Se comprueba multiplicando que $AA^{-1} = I$. **Conclusión.** Para $a = 2$, la inversa es la matriz indicada.

Opción B - Ejercicio 4. Sistema de precios

Sean c , r y b los precios de un cuaderno, un rotulador y un bolígrafo. Las dos compras descritas dan

$$5c + 2r + 3b = 22, \quad 2c + r + 6b = 14.$$

Despejamos r de la segunda ecuación: $r = 14 - 2c - 6b$. Al sustituirlo en la primera se obtiene $c + 28 - 9b = 22$, así que $c = 9b - 6$. Volviendo a la segunda ecuación,

$$r = 14 - 2(9b - 6) - 6b = 26 - 24b.$$

El precio de ocho cuadernos y tres rotuladores no depende de b :

$$8c + 3r = 8(9b - 6) + 3(26 - 24b) = 30.$$

Conclusión. Un cuaderno cuesta $9b - 6$ euros, un rotulador $26 - 24b$ euros y la compra de ocho cuadernos y tres rotuladores cuesta 30 euros.