

PROBLEMA A.1. Dado el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + 3y + z = \alpha \\ x + y - \alpha z = 1 \\ 2x + \alpha y - z = 2\alpha + 3 \end{cases}, \text{ donde } \alpha \text{ es un parámetro real. Obtener } \underline{\text{razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:}}$$

- La solución del sistema cuando $\alpha = -1$. (3 puntos)
- Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha = 0$. (3 puntos)
- El valor de α para el que el sistema es incompatible. (4 puntos)

Solución:

a) ¿Solución para $\alpha = -1$?

Para $\alpha = -1$ el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + 3y + z = -1 \\ x + y + z = 1 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases} \quad \text{La matriz ampliada de este sistema es: } M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Calculemos el rango de M ,

$$\left. \begin{aligned} 1 = 1 \neq 0 &\rightarrow \text{ran}(M) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2 \neq 0 &\rightarrow \text{ran}(M) \geq 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 6 - 2 + 1 + 3 = 6 \neq 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{ran}(M) = 3$$

El último menor de orden 3 estudiado también lo es de M' y como el máximo rango de M' es 3 entonces $\text{ran}(M') = 3$

Luego, $\text{ran}(M) = \text{ran}(M') = 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \rightarrow \text{Es un sistema compatible determinado.}$

Resolvemos el sistema por Cramer,

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{1 - 1 + 3 - 1 - 1 + 3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-1 + 1 - 2 - 2 - 1 - 1}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \\ z &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{1 + 1 + 6 + 2 + 1 - 3}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Finalmente, para $\alpha = -1$ la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -1 \\ z = \frac{4}{3} \end{cases}$$

b) Para $\alpha = 0$ el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ x + y = 1 \\ 2x - z = 3 \end{cases} \quad \text{La matriz ampliada de este sistema es: } N' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

Calculemos el rango de N ,

$$\left. \begin{aligned} |1| &= 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(N) \geq 1 \\ \left| \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{array} \right| &= 1 - 3 = -2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(N) \geq 2 \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{array} \right| &= -1 - 2 + 3 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{ran}(N) = 2$$

Calculemos el rango de N' ,

Considerando el estudio realizado anteriormente $\text{ran}(N') \geq 2$, el menor de orden 3 de N' por estudiar es:

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{array} \right| = 3 + 6 - 9 = 0 \rightarrow \text{ran}(N') = 2$$

Luego, $\text{ran}(N) = 2 = \text{ran}(N') < n^\circ \text{ de incógnitas} = 3 \rightarrow$ Es un sistema compatible indeterminado

Para resolver el sistema utilizamos las ecuaciones e incógnitas correspondientes al menor de orden 2 no nulo. Es decir, 1ª y 2ª ecuación y como incógnitas x e y .

El sistema a resolver será:

$$\begin{cases} x + 3y = -z \\ x + y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -z & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-z - 3}{-2} = \frac{3 + z}{2} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1 + z}{-2} = \frac{-1 - z}{2} \end{aligned} \rightarrow \text{Soluciones: } \begin{cases} x = \frac{3 + \lambda}{2} \\ y = \frac{-1 - \lambda}{2} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

c) ¿Valores de α para los que es S.I.?

$$\begin{cases} x + 3y + z = \alpha \\ x + y - \alpha z = 1 \\ 2x + \alpha y - z = 2\alpha + 3 \end{cases} \quad \text{La matriz ampliada de este sistema es: } A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & -\alpha & 1 \\ 2 & \alpha & -1 & 2\alpha + 3 \end{array} \right)$$

La matriz de coeficientes, A , es 3×3 , por tanto el máximo rango de A es 3

La matriz ampliada, A' , es 3×4 , por tanto el máximo rango de A' es 3.
Empezamos estudiando la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 2 & \alpha & -1 \end{vmatrix} = -1 + \alpha - 6\alpha - 2 + \alpha^2 + 3 = \alpha^2 - 5\alpha$$

$$\alpha^2 - 5\alpha = 0 \rightarrow \alpha(\alpha - 5) = 0 \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha - 5 = 0 \rightarrow \alpha = 5 \end{cases}$$

Por tanto:

- si $\alpha \neq 0, 5$ $\text{ran}(A) = 3$, como $\text{ran}(A') \geq \text{ran}(A)$ y $\text{ran}(A') \leq 3$, también $\text{ran}(A') = 3$; es decir, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ$ de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.
- si $\alpha = 0$, por el apartado b) sabemos que es Sistema compatible indeterminado.
- si $\alpha = 5$,

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 13 \end{array} \right) \text{ y sabemos que } |A| = 0$$

$$\text{En } A, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\text{En } A', \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 13 \end{vmatrix} = 13 + 25 + 6 - 10 - 5 - 39 = -10 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Por lo tanto, $\text{ran}(A) = 2 \neq 3 = \text{ran}(A') \rightarrow$ Sistema incompatible

Finalmente, el sistema es incompatible para $\alpha = 5$.

PROBLEMA A.2. Se dan las rectas $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$, $s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 0 \end{cases}$ y el punto $P(0, 3, -2)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- Las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P y es paralela a la recta r . (3 puntos)
- La ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s . (4 puntos)
- La distancia entre las rectas r y s . (3 puntos)

Solución:

a) ¿recta r_1 que pasa por P y es paralela a r ?

De r_1 conocemos: $\begin{cases} P(0, 3, -2) \\ r_1 \parallel r \rightarrow \vec{v}_{r_1} \parallel \vec{v}_r \rightarrow \vec{v}_{r_1}(3, -1, 2) \end{cases}$

Las ecuaciones de la recta r_1 serán:

E. vectorial: $r_1: \begin{cases} x = 0 + 3\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow r_1: \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

E. continua: $r_1: \frac{x}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{2}$

b) ¿plano $\pi / r \subset \pi$ y $\pi \parallel s$?

$\pi \parallel s \rightarrow \vec{v}_s$ será director de π

$r \subset \pi \rightarrow P_r \in \pi$ y $\vec{v}_r$ será director de π

De las ecuaciones de r y s obtenemos, directamente, los elementos necesarios del plano π .

Punto: $P_r(-1, 1, 0)$ y vectores directores: $\vec{v}_r(3, -1, 2)$ y $\vec{v}_s(1, -1, 0)$. La ecuación de π será:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{aligned} -3z + 2(y-1) + z + 2(x+1) &= 0 \\ -3z + 2y - 2 + z + 2x + 2 &= 0 \\ 2x + 2y - 2z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

Solución: $\pi: x + y - z = 0$

c) ¿d(r, s)?

Veamos la posición relativa de las rectas r y s .

$r: \begin{cases} P_r(-1, 1, 0) \\ \vec{v}_r(3, -1, 2) \end{cases} \quad s: \begin{cases} P_s(1, 0, 0) \\ \vec{v}_s(1, -1, 0) \end{cases}$

Construimos la matriz $M' \begin{bmatrix} \vec{v}_r & \vec{v}_s & \overrightarrow{P_r P_s} \end{bmatrix}$. $\overrightarrow{P_r P_s} = (2, -1, 0)$

$$M' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Rango de M ,

$$\left\{ \begin{array}{l} |3| = 3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 1 = -2 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(M) = 2 \rightarrow r \text{ y } s \begin{cases} \text{se cortan} \\ o \\ \text{se cruzan} \end{cases}$$

Rango de M' ,

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 4 = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M') = 3$$

$\text{ran}(M') = 3 \neq 2 = \text{ran}(M) \rightarrow$ las rectas r y s se cruzan.

Por tanto, $d(r, s) = \frac{\left\| \begin{bmatrix} \vec{v}_r & \vec{v}_s & \overrightarrow{P_r P_s} \end{bmatrix} \right\|}{\left| \vec{v}_r \times \vec{v}_s \right|}$

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_r & \vec{v}_s & \overrightarrow{P_r P_s} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\text{calculado antes}) = 2$$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3\vec{k} + 2\vec{j} + \vec{k} + 2\vec{i} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} = (2, 2, -2)$$

$$\left| \vec{v}_r \times \vec{v}_s \right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Por tanto $d(r, s) = \frac{|2|}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ u.l.}$

Solución: $d(r, s) = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ u.l.}$

PROBLEMA A.3. Se da la función f definida por $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- El dominio y las asíntotas de la función f . (3 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f . (4 puntos)
- La integral $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx$. (3 puntos)

Solución:

a) Dominio y asíntotas de f .

Dominio,

$$(x+1)^2 = 0 \rightarrow x+1=0 \rightarrow x=-1$$

$$\text{Luego, } \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}.$$

Asíntotas,

Asíntotas verticales:

Posible $x = -1$,

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{-1}{0} = \infty \rightarrow x = -1 \text{ es a.v.}$$

Asíntota horizontal

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(x+1)^2} = \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right) = \{ \text{como el denominador es un polinomio de } 2^\circ \text{ grado y el numerador de } 1^\circ \text{ grado} \} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x+1)^2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \{ \text{como en el límite anterior} \} = 0$$

La asíntota horizontal es: $y = 0$.

Por ser la función f un cociente de funciones polinómicas con el denominador de mayor grado que el numerador, no tiene asíntota oblicua.

Solución: $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$, asíntota vertical: $x = -1$ y asíntota horizontal: $y = 0$.

b) Para obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función tenemos que estudiar el signo de $f'(x)$.

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

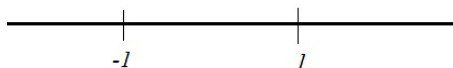
$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1)^2 - x \cdot 2 \cdot (x+1)}{((x+1)^2)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1 - 2x^2 - 2x}{(x+1)^4} = \frac{-x^2 + 1}{(x+1)^4}$$

Calculamos las raíces del numerador y denominador:

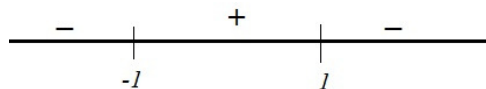
$$-x^2 + 1 = 0; \quad x^2 = 1; \quad x = \pm 1$$

$$(x+1)^4 = 0; \quad x+1 = 0; \quad x = -1$$

Debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los siguientes intervalos:



En $f'(x)$ el denominador está elevado a la cuarta, será positivo; luego el signo de $f'(x)$ depende del numerador que es un polinomio de 2° grado con coeficiente de x^2 negativo y raíces -1 y 1 . Por tanto, el signo de $f'(x)$ será:



Por tanto, $f(x)$ es creciente en $(-1, 1)$ y decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

c) Cálculo de $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx$.

Es una integral racional, descomponemos el integrando:

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1) + B}{(x+1)^2} = \frac{Ax + A + B}{(x+1)^2}$$

Por tanto, comparando los polinomios de los numeradores inicial y final, debe ser:

$$\begin{cases} A = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \rightarrow A = 1 \quad y \quad B = -1$$

$$\int \frac{x}{(x+1)^2} dx = \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{-1}{(x+1)^2} dx =$$

Calculemos cada integral por separado:

$$\int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1|$$

$$\int \frac{-1}{(x+1)^2} dx = \int -(x+1)^{-2} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x+1 \\ dt = dx \end{array} \right\} = \int -t^{-2} dt = -\frac{t^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{t^{-1}}{-1} = \frac{1}{t} = \frac{1}{x+1}$$

$$\text{Luego: } \int \frac{x}{(x+1)^2} dx = \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$$

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) Los valores de x para los que la matriz B tiene inversa. (3 puntos)

b) El valor del determinante de las matrices A^3 y $\begin{pmatrix} 2x & 5 & -1 \\ 2y & 10 & 3 \\ 2z & 5 & 0 \end{pmatrix}$, sabiendo que el valor del determinante de la matriz A es 8. (4 puntos)

c) Los valores de x, y, z para los cuales $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. (3 puntos)

Solución:

a) ¿ $x?$ / $\exists B^{-1}$,

Para que exista B^{-1} debe ser $|B| \neq 0$.

$$|B| = \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 3x$$

$$-1 - 3x = 0; \quad -3x = 1; \quad x = \frac{1}{-3} = \frac{-1}{3}$$

Por lo tanto, para $x \neq \frac{-1}{3} \quad \exists B^{-1}$

b) ¿ $|A^3|$ si $|A| = 8$?

De las propiedades de los determinantes sabemos que $|M N| = |M| |N|$, luego

$$|A^3| = |A A A| = |A| |A| |A| = |A|^3 = 8^3 = 512$$

Solución, si $|A| = 8$ entonces $|A^3| = 512$

$$\begin{vmatrix} 2x & 5 & -1 \\ 2y & 10 & 3 \\ 2z & 5 & 0 \end{vmatrix} = \{\text{sacando el factor 2 de } C_1\} = 2 \begin{vmatrix} x & 5 & -1 \\ y & 10 & 3 \\ z & 5 & 0 \end{vmatrix} = \{\text{sacando el factor 5 de } C_2\} =$$

$$= 2 \cdot 5 \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 10 |A| = 10 \cdot 8 = 80$$

Solución, si $|A| = 8$ entonces $\begin{vmatrix} 2x & 5 & -1 \\ 2y & 10 & 3 \\ 2z & 5 & 0 \end{vmatrix} = 80$

c) ¿ x, y, z ? / $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculemos A^2 ,

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y - z & x + 2 - 1 & -x + 3 \\ xy + 2y + 3z & y + 4 + 3 & -y + 6 \\ zx + y & z + 2 & -z + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y - z & x + 1 & -x + 3 \\ xy + 2y + 3z & y + 7 & -y + 6 \\ zx + y & z + 2 & -z + 3 \end{pmatrix}$$

La ecuación matricial a resolver es: $\begin{pmatrix} x^2 + y - z & x + 1 & -x + 3 \\ xy + 2y + 3z & y + 7 & -y + 6 \\ zx + y & z + 2 & -z + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Por tanto, el sistema a resolver será:

$$\begin{cases} x^2 + y - z = 0 \\ x + 1 = 0 \\ -x + 3 = 4 \\ xy + 2y + 3z = 3 \\ y + 7 = 7 \\ -y + 6 = 6 \\ zx + y = -1 \\ z + 2 = 3 \\ -z + 3 = 2 \end{cases} \quad \text{Efectuando operaciones:} \quad \begin{cases} x^2 + y - z = 0 \\ x = -1 \\ x = -1 \\ xy + 2y + 3z = 3 \\ y = 0 \\ y = 0 \\ zx + y = -1 \\ z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Comprobemos que los valores de x, y, z obtenidos cumplen las tres ecuaciones que quedan,

¿ $x^2 + y - z = 0$?
 $(-1)^2 + 0 - 1 = 1 - 1 = 0$, se cumple.

¿ $xy + 2y + 3z = 3$?
 $(-1) \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$, se cumple.

¿ $zx + y = -1$?
 $1 \cdot (-1) + 0 = -1$, se cumple.

Solución: $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$

PROBLEMA B.2. Se dan las rectas $r: \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 6x - z + 8 = 0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 3 - \alpha \end{cases}$ y el plano

$\pi: 2x + mz + 1 = 0$, siendo m un parámetro real. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- La posición relativa de las rectas r y s y el punto (o puntos) comunes a r y s . (4 puntos)
- El valor del parámetro m para que la recta s sea paralela al plano π . (3 puntos)
- La ecuación del plano que contiene a la recta s y al punto $P(1, 2, 4)$. (3 puntos)

Solución:

a) ¿Posición relativa de r y s ?

Nos interesa obtener un punto y un vector director de cada una de las rectas.

$$r: \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 6x - z + 8 = 0 \end{cases} \text{ como } \{ \text{menor de } y \text{ y } z \} \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \text{ despejamos } z \text{ e } y \text{ en función de } x.$$

$$r: \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 6x - z + 8 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -y = -5 - 2x \\ -z = -8 - 6x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 5 + 2x \\ z = 8 + 6x \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 5 + 2\lambda \\ z = 8 + 6\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{Por tanto: } r: \begin{cases} P_r(0, 5, 8) \\ \vec{v}_r(1, 2, 6) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 3 - \alpha \end{cases} \rightarrow s: \begin{cases} P_s(1, 2, 3) \\ \vec{v}_s(-2, 1, -1) \end{cases}$$

Para estudiar la posición relativa de las rectas r y s estudiamos el rango de la matriz $\begin{bmatrix} \vec{v}_r & \vec{v}_s & \overrightarrow{P_r P_s} \end{bmatrix}$, es

$$\text{decir: } M' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Rango de M , $\{M \text{ es } 3 \times 2, \text{ luego máximo rango de } M \text{ es } 2\}$

$$\left. \begin{aligned} |1| &= 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} &= 1 + 4 = 5 \neq 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{ran}(M) = 2 \rightarrow r \text{ y } s \begin{cases} \text{se cortan} \\ \text{o} \\ \text{se cruzan} \end{cases}$$

Rango de M' , $\{M' \text{ es } 3 \times 3, \text{ luego máximo rango de } M \text{ es } 3\}$.

Por el cálculo del rango de M , sabemos que $\text{ran}(M') \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 2 + 36 - 6 - 3 - 20 = 0 \rightarrow \text{ran}(M') = 2$$

Como $\text{ran}(M) = \text{ran}(M') = 2$, las rectas r y s se cortan.

El punto de corte entre r y s lo obtenemos resolviendo el sistema de las rectas a partir de sus ecuaciones paramétricas. Es decir,

$$\begin{cases} \lambda = 1 - 2\alpha \\ 5 + 2\lambda = 2 + \alpha \\ 8 + 6\lambda = 3 - \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda + 2\alpha = 1 \\ 2\lambda - \alpha = -3 \\ 6\lambda + \alpha = -5 \end{cases} \quad \text{De este sistema, según el estudio de rangos anterior, sabemos que}$$

rango de la matriz de coeficientes = rango de la matriz ampliada = 2 = n° de incógnitas (λ y α).

Resolvemos usando 1ª y 2ª ecuación (corresponden al menor de orden 2 no nulo). El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} \lambda + 2\alpha = 1 \\ 2\lambda - \alpha = -3 \end{cases} \rightarrow 2 \times 2^a \quad \begin{cases} \lambda + 2\alpha = 1 \\ 4\lambda - 2\alpha = -6 \end{cases}$$

$$5\lambda = -5 \rightarrow \lambda = -1$$

Sustituyendo en la 2ª ecuación: $2(-1) - \alpha = -3$; $-2 - \alpha = -3$; $-\alpha = -3 + 2$; $-\alpha = -1$; $\alpha = 1$

Sustituimos los valores de las incógnitas en las ecuaciones de r y s para comprobar que se obtiene el mismo punto. Sólo sería necesario sustituir en una de las rectas.

$$\text{En } r: \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 + 2(-1) = 3 \\ z = 8 + 6(-1) = 2 \end{cases} \quad \text{En } s: \begin{cases} x = 1 - 2 \cdot 1 = -1 \\ y = 2 + 1 = 3 \\ z = 3 - 1 = 2 \end{cases}$$

Por tanto, el punto de corte entre las rectas r y s es $(-1, 3, 2)$

b) ¿ m / recta s // plano π ?

$$\text{Como } s // \pi \rightarrow \vec{v}_s \perp \vec{n}_\pi \quad \left[\vec{n}_\pi \text{ vector perpendicular al plano } \pi \right] \rightarrow \vec{v}_s \cdot \vec{n}_\pi = 0$$

$$\vec{v}_s(-2, 1, -1) \text{ y } \vec{n}_\pi(2, 0, m), \quad \vec{v}_s \cdot \vec{n}_\pi = (-2, 1, -1)(2, 0, m) = -4 - m$$

Por lo que, $-4 - m = 0$; $m = -4$

En conclusión, para que la recta s sea paralela al plano π debe ser $m = -4$.

c) ¿plano τ ? / recta $s \subset \tau$ y $P(1, 2, 4) \in \tau$

Para obtener la ecuación del plano τ necesitamos un punto y dos vectores directores del plano.

$$\text{Como } s \subset \tau \rightarrow \begin{cases} P_s(1, 2, 3) \in \tau \\ \vec{v}_s(-2, 1, -1) \text{ es director de } \tau \end{cases}$$

Además, $P(1, 2, 4) \in \tau$

$$\text{Por tanto, del plano } \tau \text{ conocemos } \rightarrow \begin{cases} \text{punto } (1, 2, 3) \\ \vec{u} = \vec{v}_s(-2, 1, -1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PP_s}(0, 0, -1) \end{cases}$$

Como los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos $\left(\frac{-2}{0} \neq \frac{1}{0} \neq \frac{-1}{1} \right)$ sirven como vectores directores de τ

$$\text{La ecuación del plano } \tau \text{ será: } \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0, \text{ efectuando operaciones:}$$

$$-x + 1 - 2y + 4 = 0; \quad -x - 2y + 5 = 0; \quad x + 2y - 5 = 0$$

Solución: $\tau: x + 2y - 5 = 0$

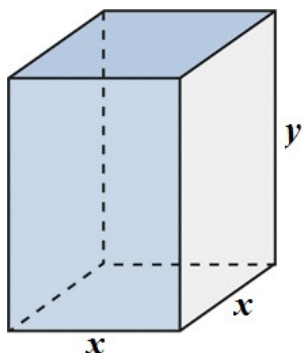
PROBLEMA B.3. Se va a construir un depósito de 1500 m^3 de capacidad, con forma de caja abierta por la parte superior. Su base es un cuadrado y las paredes laterales son cuatro rectángulos iguales perpendiculares a la base. El precio de cada m^2 de la base es de 15€ y el precio de cada m^2 de pared lateral es de 5€.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- El coste total del depósito en función de la longitud x de un lado de la base. (3 puntos)
- Las longitudes del lado de la base y de la altura del depósito para que dicho coste total sea mínimo. (5 puntos)
- El valor del mínimo coste total del depósito. (2 puntos)

Solución:

El depósito es un paralelepípedo de base cuadrada y sin tapa superior. Los datos del problema podemos resumirlos en:



$$V = 1500 \text{ m}^3$$

$$\text{base a } 15 \text{ €/m}^2$$

$$\text{caras laterales a } 5 \text{ €/m}^2$$

- a) Coste del depósito en función de x (C).

Base cuadrada de área x^2 , el coste de la base es: $15x^2$

Área lateral, cuatro rectángulos, mide $4xy$, el coste del área lateral es: $5 \cdot 4xy = 20xy$

Por tanto, $C = 15x^2 + 20xy$

Falta expresar y en función de x . Lo hacemos a partir del dato $V = 1500$

$$\text{El volumen de la caja es: } V = x^2 y \rightarrow x^2 y = 1500 \rightarrow y = \frac{1500}{x^2}$$

$$\text{Luego, } C = 15x^2 + 20x \frac{1500}{x^2} = 15x^2 + \frac{30000}{x}$$

Como x es la longitud del lado de la base, $x > 0$

$$\text{Solución: } C = 15x^2 + \frac{30000}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

- b) ¿ x y / coste total mínimo?

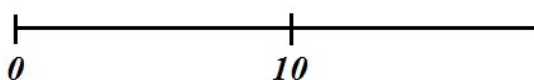
Busquemos el mínimo de la función C anteriormente obtenida.

$$C = 15x^2 + \frac{30000}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

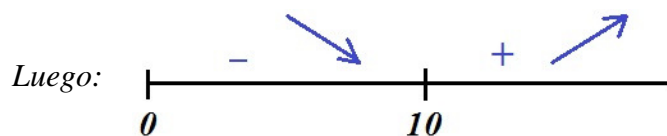
$$C' = 30x - \frac{30000}{x^2}$$

$$30x - \frac{30000}{x^2} = 0 \rightarrow 30x^3 - 30000 = 0 \rightarrow 30x^3 = 30000 \rightarrow x^3 = 1000 \rightarrow x = \sqrt[3]{1000} = 10$$

Para determinar si es máximo o mínimo, estudiamos el signo de C' en los intervalos:



x	C'
1	$30 \cdot 1 - \frac{30000}{1^2} = 30 - 30000 = -29970 < 0$
11	$30 \cdot 11 - \frac{30000}{11^2} = \frac{9930}{121} > 0$



En $x = 10$ C tiene un mínimo relativo que, además, es el absoluto porque la función a la izquierda es decreciente y a la derecha creciente.

Para $x = 10$, $y = \frac{1500}{10^2} = 15$

En conclusión, **el coste del depósito es mínimo cuando el lado de la base mide 10m y la altura del depósito es de 15m.**

c) ¿Mínimo coste?

$$x = 10 \rightarrow C = 15 \cdot 10^2 + \frac{30000}{10} = 1500 + 3000 = 4500$$

Solución: el coste mínimo es de 4500€.

Tu Profe al Rescate