

Resolución razonada de los cuatro problemas de cada ejercicio. En el examen se eligen tres problemas de un ejercicio; aquí se desarrollan todos.

Ejercicio A

Problema 1 · Ecuación matricial

Reagrupamos los términos que contienen A y aislamos esta matriz:

$$AB + A = 2B^T \Rightarrow A(B + I) = 2B^T \Rightarrow A = 2B^T(B + I)^{-1}.$$

Como $B + I = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ tiene determinante 12, es invertible y

$$(B + I)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Sustituimos la matriz B del enunciado:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Problema 2 · Producción de whisky

Sean x e y los litros del primer y del segundo whisky. Las disponibilidades de malta A y B limitan la producción a

$$0,7x + 0,5y \leq 132, \quad 0,3x + 0,5y \leq 90.$$

La demanda del segundo whisky no puede superar en más del 80% la del primero: $y \leq 1,8x$. Queremos maximizar los ingresos $I = 12x + 16y$. Al multiplicar las restricciones de malta por 10, quedan $7x + 5y \leq 1320$ y $3x + 5y \leq 900$. Los vértices factibles son $(0, 0)$, $(\frac{1320}{7}, 0)$, $(75, 135)$ y $(105, 117)$. Los dos últimos se obtienen al intersectar, respectivamente, $3x + 5y = 900$ con $y = 1,8x$, y las dos restricciones de disponibilidad.

(x, y)	$(0, 0)$	$(\frac{1320}{7}, 0)$	$(75, 135)$	$(105, 117)$
I (€)	0	$\frac{15840}{7}$	3060	3132

Producir 105 litros del primer whisky y 117 del segundo; ingresos máximos: 3132 €.

Problema 3 · Continuidad e integral

La continuidad en $x = -1$ exige que el límite por la izquierda coincida con el valor de la función, dado por el segundo tramo:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (3x + a) = a - 3, \quad f(-1) = 2(-1) + 2 = 0.$$

Por tanto, $a - 3 = 0$ y $a = 3$. Para $a = 0$, en $x = -1$ el límite izquierdo es -3 y el valor por la derecha es 0 ; hay una discontinuidad de salto. En $x = 1$, el límite por la izquierda es $2(1) + 2 = 4$, mientras que el valor por la derecha es

$$\frac{2(1) - 11}{1 - 3} = \frac{9}{2},$$

por lo que también hay salto. En $x = 3$, la expresión racional no está definida y el numerador tiende a -5 ; los límites laterales son $+\infty$ por la izquierda y $-\infty$ por la derecha. La función es continua en el resto de su dominio.

Para el apartado c), integramos $x^3 - 2$ entre -2 y 2 :

$$\int_{-2}^2 (x^3 - 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x \right]_{-2}^2 = 0 - 8 = -8.$$

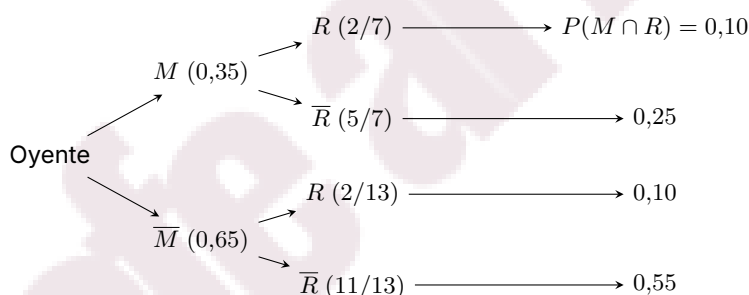
$$a = 3; \quad \text{si } a = 0, \text{ hay discontinuidades en } -1, 1, 3; \quad \int_{-2}^2 (x^3 - 2) dx = -8.$$

Problema 4 · Oyentes de dos emisoras

Sean M y R los sucesos «escuchar Music» y «escuchar Rhythm». El 55% no escucha ninguna, así que $P(M \cup R) = 0,45$. Con $P(M) = 0,35$ y $P(M \cap R) = 0,10$,

$$P(R) = P(M \cup R) - P(M) + P(M \cap R) = 0,45 - 0,35 + 0,10 = 0,20.$$

Luego $P(R \cap \overline{M}) = 0,20 - 0,10 = 0,10$ y $P(M | R) = 0,10/0,20 = 1/2$. El árbol desglosa cada camino y su probabilidad conjunta:



$$P(R) = 0,20, \quad P(R \cap \overline{M}) = 0,10, \quad P(M | R) = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio B

Problema 1 · Número de alumnos por grupo

Sean a, b, c los estudiantes de los grupos A, B y C. El total y las condiciones sobre comida y salida generan

$$a + b + c = 65, \quad \frac{a}{2} + \frac{4b}{5} + \frac{2c}{3} = 42, \quad \frac{3a}{4} + b + \frac{2c}{3} = 52.$$

Sustituimos $c = 65 - a - b$ en las dos últimas. Tras simplificar se obtiene $5a - 4b = 40$ y $a + 4b = 104$. Sumando ambas ecuaciones, $6a = 144$, de modo que $a = 24$; después, $b = 20$ y $c = 21$.

Grupo A: 24, grupo B: 20, grupo C: 21 alumnos.

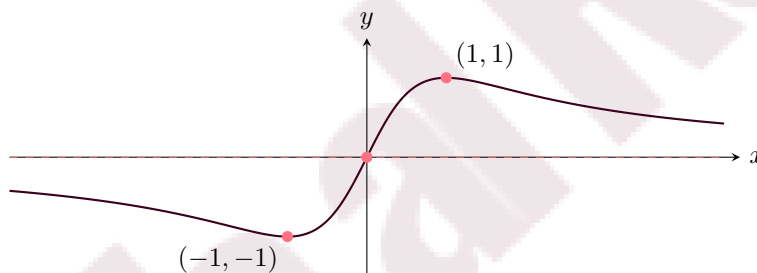
Problema 2 · Dominio, asíntotas y extremos

La función es $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Como $x^2 + 1 > 0$ para todo real, su dominio es $\mathbb{R}$. El único corte con ambos ejes es $(0, 0)$. No tiene asíntotas verticales; además, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, por lo que $y = 0$ es asíntota horizontal en ambos extremos.

El signo de la derivada determina los intervalos de monotonía:

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0 \iff x = -1 \text{ o } x = 1.$$

Como el denominador es positivo, $f' < 0$ si $x < -1$ o $x > 1$, y $f' > 0$ si $-1 < x < 1$. Hay un mínimo relativo en $(-1, -1)$ y un máximo relativo en $(1, 1)$. Estos datos permiten dibujar la gráfica, que se aproxima al eje X cuando $x \rightarrow \pm\infty$:



Dominio $\mathbb{R}$; asíntota $y = 0$; $\min(-1, -1)$, $\max(1, 1)$.

Problema 3 · Efectivo en caja

El tiempo de apertura restringe el dominio a $0 \leq t \leq 6$. La función $C(t) = 2000 - 234t + 27t^2$ es una parábola con coeficiente principal positivo; su vértice da el mínimo:

$$C'(t) = -234 + 54t = 0 \implies t = \frac{13}{3} \text{ h}, \quad C\left(\frac{13}{3}\right) = 1493 \text{ €}.$$

La derivada es negativa antes de $13/3$ y positiva después, así que ese punto es un mínimo. Para hallar el máximo en el intervalo cerrado comparamos el vértice con los extremos:

$$C(0) = 2000 \text{ €}, \quad C(6) = 1568 \text{ €}.$$

Máximo al abrir la caja ($t = 0$) : 2000 €; mínimo a las $\frac{13}{3}$ h : 1493 €.

Problema 4 · Sucesos independientes

Sean p y q las probabilidades de los dos sucesos. Al ser independientes, la probabilidad de que ocurran ambos es el producto, y la unión cumple

$$pq = \frac{3}{25}, \quad p + q - pq = \frac{17}{25}.$$

De la segunda igualdad se deduce $p + q = 20/25 = 4/5$. Por tanto, p y q son las raíces de

$$t^2 - \frac{4}{5}t + \frac{3}{25} = 0 \implies t = \frac{\frac{4}{5} \pm \sqrt{\frac{16}{25} - \frac{12}{25}}}{2} = \frac{\frac{4}{5} \pm \frac{2}{5}}{2},$$

es decir, $t = \frac{1}{5}$ o $t = \frac{3}{5}$. No hay información que permita asignar cada valor a un suceso concreto, así que pueden intercambiarse.

$$\{P(A), P(B)\} = \left\{ \frac{1}{5}, \frac{3}{5} \right\}.$$