

Se desarrollan las diez preguntas de las dos opciones del examen.

Bloque A

Ejercicio A.1 · Igualdad de matrices e inversa

La condición $A = A^{-1}$ equivale, al multiplicar por A , a $A^2 = I$. Al elevar la matriz al cuadrado,

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + 1 & 0 & 2a \\ 0 & b^2 & 0 \\ 2a & 0 & a^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Igualando las entradas con las de la identidad, se obtiene $a^2 + 1 = 1$, $2a = 0$ y $b^2 = 1$. Luego $a = 0$ y $b = \pm 1$. Para $a = b = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La primera y tercera coordenadas forman un bloque $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, cuyo determinante es 3; la coordenada central tiene inversa $1/2$. Así,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$a = 0, \quad b \in \{-1, 1\}; \quad A^{-1}|_{a=b=2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio A.2 · Dominio, asíntotas y recta tangente

El denominador se anula cuando $x^2 - 1 = 0$, es decir, en $x = \pm 1$. Como el numerador no se anula en esos puntos,

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad x = -1, x = 1 \text{ son asíntotas verticales.}$$

Los límites laterales confirman las divergencias: en $x = -1$ son $+\infty$ por la izquierda y $-\infty$ por la derecha; en $x = 1$ son $-\infty$ por la izquierda y $+\infty$ por la derecha.

Dividiendo polinomios,

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2 - 1} = x + \frac{x + 4}{x^2 - 1}.$$

El resto dividido por el denominador tiende a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$, así que $y = x$ es la asíntota oblicua en ambos extremos. Además, $f(x)$ tiende a $-\infty$ si $x \rightarrow -\infty$ y a $+\infty$ si $x \rightarrow +\infty$, por lo que no hay asíntota horizontal.

En $x = 0$, $f(0) = -4$. La derivada del cociente vale

$$f'(0) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x(x^3 + 4)}{(x^2 - 1)^2} \Big|_{x=0} = 0.$$

La tangente tiene pendiente cero y pasa por $(0, -4)$, de modo que su ecuación es $y = -4$.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}; \quad x = \pm 1 \text{ verticales}; \quad y = x \text{ oblicua}; \quad \text{tangente: } y = -4.$$

Ejercicio A.3 · Continuidad y área

a) La función es polinómica para $x \leq 1$ y logarítmica para $x > 1$; el único punto que hay que comprobar es el de unión, $x = 1$. La rama izquierda toma el valor $1 - a$, mientras que la rama derecha tiende a $\ln 1 = 0$. Por tanto, la continuidad exige $1 - a = 0$, es decir, $a = 1$.

b) Con $a = 1$, en $[-1, 0]$ la función es $x^2 - x$. Es positiva en el interior del intervalo, así que el área coincide con la integral:

$$A = \int_{-1}^0 (x^2 - x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

$$a = 1; \quad A = \frac{5}{6} \text{ unidades cuadradas.}$$

Ejercicio A.4 · Probabilidad condicionada

Sean T el suceso «teletrabaja» y S el suceso «padece trastornos del sueño». Se conoce $P(T) = 0,6$, $P(S | T) = 0,3$ y $P(S | T^c) = 0,8$.

La probabilidad de que teletrabaje y no padezca trastornos es el producto de la probabilidad de teletrabajar por la probabilidad condicionada de no padecerlos:

$$P(T \cap S^c) = P(T)P(S^c | T) = 0,6(1 - 0,3) = 0,42.$$

Para el apartado b), usamos Bayes. Primero,

$$P(S^c) = P(T)P(S^c | T) + P(T^c)P(S^c | T^c) = 0,6(0,7) + 0,4(0,2) = 0,5.$$

Por tanto,

$$P(T^c | S^c) = \frac{P(T^c \cap S^c)}{P(S^c)} = \frac{0,4(0,2)}{0,5} = 0,16.$$

$$P(T \cap S^c) = 0,42; \quad P(T^c | S^c) = 0,16.$$

Ejercicio A.5 · Intervalo para una proporción y tamaño muestral

a) La proporción muestral es $\hat{p} = 320/500 = 0,64$. El intervalo de confianza normal para una proporción es

$$\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}.$$

Para una confianza del 96%, $z_{0,98} \approx 2,055$. Por tanto,

$$0,64 \pm 2,05 \sqrt{\frac{0,64(0,36)}{500}} = 0,64 \pm 0,0441.$$

b) Para garantizar un error máximo $E = 0,05$ con 95% de confianza, se usa $n \geq z_{0,975}^2 p(1-p)/E^2$. Sustituyendo el valor supuesto $p = 0,5$:

$$n \geq \frac{1,96^2(0,5)(0,5)}{0,05^2} = 384,16.$$

El tamaño tiene que ser entero y satisfacer la desigualdad, de modo que se redondea hacia arriba.

$$IC_{96\%}(p) \approx (0,5959, 0,6841); \quad n_{\min} = 385.$$

Bloque B

Ejercicio B.1 · Discusión y resolución de un sistema

La matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = 3(a^2 - 1).$$

Si $a \neq \pm 1$, el determinante no se anula; el rango de A es 3 y el sistema es compatible determinado.

Si $a = 1$ o $a = -1$, la tercera fila es combinación lineal de las dos primeras: cumple

$$F_3 = \frac{1}{2}F_1 + \frac{3}{2}F_2,$$

y los términos independientes también verifican $4 = \frac{1}{2}(-1) + \frac{3}{2}(3)$. Así, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$, luego el sistema es compatible indeterminado.

Para $a = 1$, sumando las dos primeras ecuaciones se obtiene $2x = 2$, luego $x = 1$. La primera da $y - z = -2$, por lo que, tomando $y = \lambda$, queda $z = \lambda + 2$.

$$a \neq \pm 1 : \text{SCD}; \quad a = \pm 1 : \text{SCI}; \quad (x, y, z) = (1, \lambda, \lambda + 2), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (a = 1).$$

Ejercicio B.2 · Región factible y beneficio máximo

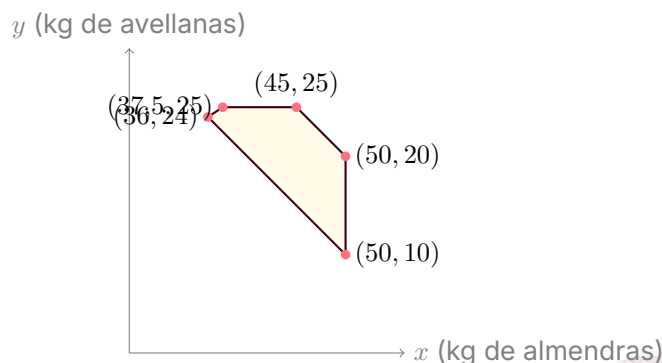
Sean x los kilogramos de almendras e y los de avellanas. Las existencias y condiciones del enunciado se traducen en

$$0 \leq x \leq 50, \quad 0 \leq y \leq 25, \quad x \geq \frac{3}{2}y, \quad 60 \leq x + y \leq 70.$$

El beneficio es $B(x, y) = x + 2y$. Las intersecciones que forman los vértices del recinto son

$$(36, 24), \quad (37,5, 25), \quad (45, 25), \quad (50, 20), \quad (50, 10).$$

Por ejemplo, $(36, 24)$ resulta de $x = 1,5y$ y $x + y = 60$; los otros puntos se obtienen al intersectar las restricciones activas correspondientes.



Al ser lineal el beneficio, evaluamos en los vértices:

(x, y)	$(36, 24)$	$(37,5, 25)$	$(45, 25)$	$(50, 20)$	$(50, 10)$
$B = x + 2y$	84	87,5	95	90	70

$B_{\max} = 95$ euros, con 45 kg de almendras y 25 kg de avellanas.

Ejercicio B.3 · Crecimiento, extremos e integral

El dominio de $f(x) = (x^2 - 3)e^x$ es $\mathbb{R}$. Para estudiar su monotonía, calculamos la derivada:

$$f'(x) = e^x(x^2 + 2x - 3) = e^x(x + 3)(x - 1).$$

Como $e^x > 0$, los puntos críticos son $x = -3$ y $x = 1$, y el signo de la derivada viene dado por $(x + 3)(x - 1)$. Es positivo en $(-\infty, -3)$ y $(1, +\infty)$ y negativo en $(-3, 1)$. Por tanto, hay un máximo relativo en $x = -3$ y un mínimo relativo en $x = 1$:

$$f(-3) = \frac{6}{e^3}, \quad f(1) = -2e.$$

Para el apartado b), los factores exponenciales se cancelan dentro del integrando:

$$\int_1^2 e^{-x} f(x) dx = \int_1^2 (x^2 - 3) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x \right]_1^2 = -\frac{2}{3}.$$

Máximo local $(-3, 6/e^3)$; mínimo local $(1, -2e)$; $\int_1^2 e^{-x} f(x) dx = -\frac{2}{3}$.

Ejercicio B.4 · Probabilidad condicionada e independencia

El enunciado da $P(A) = 0,5$, $P(\bar{B} | A) = 0,4$ y $P(A \cup B) = 0,9$. De la probabilidad condicionada,

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(\bar{B} | A) = 0,5(0,4) = 0,2.$$

El suceso $A \cup B$ se compone de A y de $B \cap \bar{A}$, que son incompatibles; por ello

$$P(B \cap \bar{A}) = P(A \cup B) - P(A) = 0,9 - 0,5 = 0,4.$$

Así, $P(B | \bar{A}) = 0,4/0,5 = 0,8$. Además, $P(A \cap B) = 0,5 - 0,2 = 0,3$ y $P(B) = 0,3 + 0,4 = 0,7$. Si fueran independientes, $P(A \cap B)$ sería $P(A)P(B) = 0,35$, distinto de 0,3; luego son dependientes.

$P(B | \bar{A}) = 0,8$; A y B son dependientes.

Ejercicio B.5 · Distribución de la media e intervalo de confianza

a) Para $n = 36$, la media muestral tiene distribución normal de media 120 y desviación típica $20/\sqrt{36} = 10/3$. Tipificando el umbral de 125 g:

$$P(\bar{X} \leq 125) = \Phi\left(\frac{125 - 120}{10/3}\right) = \Phi(1,5) = 0,9332.$$

b) El intervalo es simétrico y su punto medio es la media muestral:

$$\bar{x} = \frac{117,3444 + 124,6556}{2} = 121, \quad E = 3,6556.$$

Con $\sigma = 20$ y $n = 81$, el error tiene la forma $E = z_{1-\alpha/2} 20/9$. Entonces $z_{1-\alpha/2} = 3,6556/(20/9) \approx 1,645$, que corresponde a una confianza central del 90%.

$P(\bar{X} \leq 125) = 0,9332;$	nivel de confianza = 90%.
---------------------------------	---------------------------