

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Posición relativa de tres planos

Escribimos las ecuaciones como un sistema y estudiamos el determinante de su matriz de coeficientes:

$$\begin{cases} x + z = \lambda, \\ 4x + (\lambda - 2)y + (\lambda + 2)z = \lambda + 2, \\ 2(\lambda + 1)x - (\lambda + 6)z = -\lambda, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & \lambda - 2 & \lambda + 2 \\ 2(\lambda + 1) & 0 & -(\lambda + 6) \end{pmatrix}.$$

Su determinante es $\det A = -(\lambda - 2)(3\lambda + 8)$. Si $\lambda \neq 2, -\frac{8}{3}$, el sistema tiene solución única: los tres planos se cortan en un punto.

Para $\lambda = 2$, las dos primeras ecuaciones se reducen a $x + z = 2$ y $x + z = 1$. Por tanto, π_1 y π_2 son paralelos distintos. El normal de π_3 no es proporcional a los de estos planos, así que π_3 corta a cada uno de ellos; las dos rectas de intersección resultantes son paralelas.

Para $\lambda = -\frac{8}{3}$, la primera ecuación es $x + z = -\frac{8}{3}$, mientras que la tercera se reduce a $x + z = -\frac{4}{5}$. Así, π_1 y π_3 son paralelos distintos. El normal de π_2 no es proporcional a ellos, por lo que π_2 corta a ambos en dos rectas paralelas. **Conclusión.** Si $\lambda \neq 2, -\frac{8}{3}$, los tres planos se cortan en un punto. Si $\lambda = 2$, $\pi_1 \parallel \pi_2$ y π_3 corta a ambos; si $\lambda = -\frac{8}{3}$, $\pi_1 \parallel \pi_3$ y π_2 corta a ambos.

Opción A - Ejercicio 2. Recta perpendicular a dos rectas

Pasamos las rectas, dadas como intersección de planos, a forma paramétrica:

$$r : (x, y, z) = (0, -3, -3) + t(1, 1, 2), \quad s : (x, y, z) = (0, -7, -4) + u(-1, -2, -1).$$

Una recta perpendicular a ambas debe tener un vector director perpendicular a los dos directores. El producto vectorial proporciona esa dirección:

$$(1, 1, 2) \times (-1, -2, -1) = (3, -1, -1).$$

Como la recta pedida pasa por el origen, su forma paramétrica es

$$(x, y, z) = v(3, -1, -1), \quad v \in \mathbb{R}.$$

Para hallar el punto donde esta recta corta a s , sustituimos $(x, y, z) = (3v, -v, -v)$ en las ecuaciones $x - z = 4$ y $2x - y = 7$. Ambas dan $v = 1$. **Conclusión.** La intersección de s con la recta perpendicular es $(3, -1, -1)$.

Opción A - Ejercicio 3. Potencias y conmutatividad de matrices

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculamos A^2 y lo expresamos como combinación de A e I :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2A - I.$$

Conclusión. $\alpha = 2$ y $\beta = -1$.

b) Es útil observar que $A = I + N$, donde $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $N^2 = 0$. Al elevar $I + N$ a una potencia, todos los términos con N^2 o potencias superiores desaparecen; así, $A^n = I + nN$. En particular,

$$A^5 = I + 5N = 5A - 4I = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. $A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Al desarrollar el producto respetando el orden de las matrices,

$$(A - X)(A + X) = A^2 + AX - XA - X^2.$$

La igualdad con $A^2 - X^2$ equivale a $AX = XA$. Escribimos $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ y comparamos:

$$AX = \begin{pmatrix} p+2r & q+2s \\ r & s \end{pmatrix}, \quad XA = \begin{pmatrix} p & 2p+q \\ r & 2r+s \end{pmatrix}.$$

La igualdad exige $r = 0$ y $s = p$; q queda libre. **Conclusión.** Todas las soluciones son $X = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & p \end{pmatrix}$, con $p, q \in \mathbb{R}$.

Opción A - Ejercicio 4. Tangente y distancia mínima

La función $f(x) = 1/x$ tiene dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Para $a > 0$, $f(a) = 1/a$ y $f'(a) = -1/a^2$. La recta tangente en $(a, 1/a)$ es

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a), \quad \text{es decir,} \quad y = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}.$$

Sus cortes con los ejes son $(2a, 0)$ y $(0, 2/a)$. La distancia entre ellos depende de a así:

$$D(a) = \sqrt{(2a)^2 + (2/a)^2} = 2\sqrt{a^2 + a^{-2}}, \quad a > 0.$$

Como la raíz cuadrada es creciente, basta minimizar $g(a) = a^2 + a^{-2}$. Derivamos:

$$g'(a) = 2a - \frac{2}{a^3} = \frac{2(a^4 - 1)}{a^3}.$$

Para $0 < a < 1$ esta derivada es negativa y para $a > 1$ es positiva; por tanto, g y también D alcanzan su mínimo en $a = 1$. **Conclusión.** El valor que minimiza la distancia es $a = 1$; la distancia mínima es $D(1) = 2\sqrt{2}$.

Opción B - Ejercicio 1. Tangente horizontal de una función logarítmica

La función $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$ está definida para $x > 1$. La tangente es paralela al eje OX cuando $f'(x) = 0$. Derivando el logaritmo del cociente,

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x(x-1)}.$$

El denominador no se anula en el dominio, así que la única posibilidad es $x = 2$. En ese punto,

$$f(2) = \ln\left(\frac{4}{1}\right) = \ln 4.$$

Conclusión. El punto buscado es $(2, \ln 4)$.

Opción B - Ejercicio 2. Extremos e integral de una función

La función es $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$; su denominador es positivo para todo x , así que su dominio es $\mathbb{R}$. Derivamos para localizar los extremos:

$$f'(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}.$$

El único punto crítico satisface $e^x = 1$, luego $x = 0$. La derivada es positiva si $x < 0$ y negativa si $x > 0$, de modo que allí alcanza un máximo global:

$$f(0) = \frac{1}{4}.$$

Además, $f(x) > 0$ y $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, por lo que no alcanza un mínimo.

Para el apartado b), hacemos el cambio $u = 1 + e^x$, $du = e^x dx$:

$$\int_0^a f(x) dx = \int_2^{1+e^a} \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u}\right]_2^{1+e^a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^a}.$$

Al igualar esta expresión a $1/4$ se obtiene $1 + e^a = 4$, luego $e^a = 3$. **Conclusión.** La función alcanza un máximo global $1/4$ en $x = 0$, no tiene mínimo y el parámetro pedido es $a = \ln 3$.

Opción B - Ejercicio 3. Familia de planos

Reagrupamos los términos con y sin m :

$$mx + (m-2)y + 3(m+1)z + (m+1) = m(x+y+3z+1) + (-2y+3z+1) = 0.$$

a) Para que un punto pertenezca a todos los planos, el coeficiente de m y el término independiente deben anularse. La recta común es la intersección

$$x + y + 3z + 1 = 0, \quad -2y + 3z + 1 = 0.$$

Tomando $z = 1 + 2t$ resulta $y = 2 + 3t$ y $x = -6 - 9t$. Por tanto,

$$(x, y, z) = (-6, 2, 1) + t(-9, 3, 2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Al sustituir $P = (1, 1, 0)$ en la ecuación de la familia,

$$m + (m-2) + (m+1) = 3m - 1 = 0,$$

por lo que $m = 1/3$. Sustituimos ese valor en la ecuación del plano y multiplicamos por 3:

$$x - 5y + 12z + 4 = 0.$$

c) La recta dada como intersección de planos tiene vector director

$$(1, 0, -2) \times (0, -1, 1) = (-2, -1, -1),$$

que podemos sustituir por el proporcional $(2, 1, 1)$. El plano de parámetro m tiene normal $(m, m-2, 3m+3)$. Para que contenga una dirección paralela a la recta, su normal debe ser perpendicular al vector director:

$$(m, m-2, 3m+3) \cdot (2, 1, 1) = 6m + 1 = 0,$$

de donde $m = -1/6$. Al sustituir y simplificar obtenemos

$$x + 13y - 15z - 5 = 0.$$

Conclusión. La recta común, el plano que pasa por P y el plano paralelo a la recta son los tres objetos indicados en los apartados a), b) y c).

Opción B - Ejercicio 4. Potencias e inversa de matrices triangulares

Las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + A.$$

a) Calculamos las primeras potencias para detectar cuándo se anulan:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = 0.$$

Por tanto, también $A^{10} = 0$.

b) Como $B = I + A$ y $A^3 = 0$, la suma finita geométrica da

$$B^{-1} = (I + A)^{-1} = I - A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -k & k^2 - t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En efecto, al multiplicar $I + A$ por $I - A + A^2$ se obtiene $I + A^3 = I$.

c) Si $k = 0$, entonces $A^2 = 0$ y $B = I + A$. En la potencia binomial solo permanecen los términos I y $10A$:

$$B^{10} = (I + A)^{10} = I + 10A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. $A^{10} = 0$, la inversa es la indicada y, para $k = 0$, $B^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.