

Problema 1. A. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = (1 \ 1 \ 0), \quad C = (1 \ 2) \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sabiendo que, si K es una matriz, K^t representa su matriz traspuesta, se pide:

- Calcular $M = A B^t C - D$. (0,75 puntos)
- Justificar si M es invertible y, si lo es, hallar su inversa. (0,75 puntos)
- Hallar M^2 y M^8 . (0,5 puntos)
- Justificar si son invertibles las matrices $C C^t$ y $C^t C$. (0,5 puntos)
- Hallar la matriz X que satisface la ecuación $A^t + X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t = (C^t B)^t$. (1 punto)

Solución:

a) Calcular $M = A B^t C - D$.

$$A B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A B^t C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A B^t C - D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

b) Justificar si M es invertible y, si lo es, hallar su inversa.

$$\text{Como } |M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0 \rightarrow \exists M^{-1}$$

Cálculo de M^{-1} ,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow M^{-1} = \frac{1}{|M|} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Solución: M es invertible y $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$

c) Hallar M^2 y M^8 .

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M^2 M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$M^8 = M^4 M^4 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 & 0 \\ 0 & 81 \end{pmatrix}$$

Solución: $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $M^8 = \begin{pmatrix} 81 & 0 \\ 0 & 81 \end{pmatrix}$.

d) Justificar si son invertibles las matrices $C C^t$ y $C^t C$.

$C C^t$, C es 1×2 y C^t es $2 \times 1 \rightarrow C C^t$ es 1×1

$$C C^t = (1 \ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1 + 2 \cdot 2) = (5)$$

$$|C C^t| = |5| = 5 \neq 0 \rightarrow C C^t \text{ es invertible.}$$

$C^t C$, C^t es 2×1 y C es $1 \times 2 \rightarrow C^t C$ es 2×2

$$C^t C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|C^t C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \rightarrow C^t C \text{ no es invertible.}$$

Solución: $C C^t$ es invertible y $C^t C$ no es invertible.

e) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $A^t + X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t = (C^t B)^t$.

Efectuado operaciones:

$$A^t + X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t = (C^t B)^t; \quad A^t + X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (C^t B)^t; \quad X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (C^t B)^t - A^t$$

Según obtuvimos en el apartado a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = M$ y en el b) calculamos que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

La expresión final anterior queda; $X M = (C^t B)^t - A^t$

Despejemos X , multiplicamos por la derecha por M^{-1} ,

$$X M M^{-1} = [(C^t B)^t - A^t] M^{-1}; \quad X I = [(C^t B)^t - A^t] M^{-1}; \quad X = [(C^t B)^t - A^t] M^{-1};$$

Efectuemos los cálculos para obtener X

$$C^t B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \ 1 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad (C^t B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (C^t B)^t - A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = [(C^t B)^t - A^t] M^{-t} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} & 0 \cdot \frac{2}{3} - 3 \cdot \frac{1}{3} \\ 1 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{1}{3} & 1 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \\ -2 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{1}{3} & -2 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$

Tu Prof te al Rescate

Problema 1. B. Una empresa de organización de eventos desea poner a la venta dos tipos de entradas para un evento musical: entradas preferentes y entradas estándar, que se venden a 115€ y 90€, respectivamente, aunque en las localidades preferentes la empresa tiene unos gastos de 5€ por entrada porque en ellas se sirve un aperitivo. La instalación de cada localidad preferente tiene un coste de 20€ y la de cada localidad estándar de 10€; la empresa dispone de un presupuesto de 1.000€ para gastos de instalación. El aforo máximo es de 75 asientos.

- a) ¿Cuántas entradas de cada tipo se deben poner a la venta para obtener el máximo beneficio posible? (3 puntos)
- b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (0,5 puntos)

Solución:

Llamando: x = número de entradas preferente
 y = número de entradas estándar

Los datos del problema podemos resumirlo en la tabla siguiente:

	Nº entradas	Beneficio	costes
preferente	x	$(115-5)€/entrada$	$20€/ entrada$
estándar	y	$90€/entrada$	$10€/ entrada$
disponibilidad	75		1000€

El problema proporcionan las siguientes restricciones:

El aforo máximo es de 75 asientos $\rightarrow x + y \leq 75$

la empresa dispone de un presupuesto de 1.000€ para gastos de instalación $\rightarrow 20x + 10y \leq 1000$
 $\rightarrow 2x + y \leq 100$

Como las variables x e y representan número de unidades deben ser números naturales.

El beneficio viene dada por la función: $z = 110x + 90y$

El problema a resolver es:

maximizar $z = 110x + 90y$

$$\text{s.a.} \begin{cases} x + y \leq 75 \\ 2x + y \leq 100 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $x + y \leq 75$

$$x + y = 75$$

x	y
0	75
75	0

¿(0,0) cumple?

$$0 + 0 \leq 75 \quad \text{Sí}$$

(b) $2x + y \leq 100$

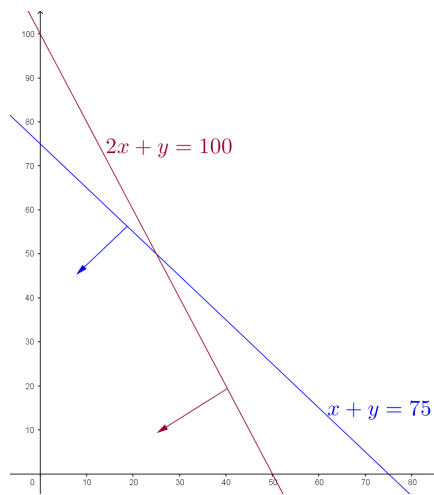
$$2x + y = 100$$

x	y
0	100
50	0

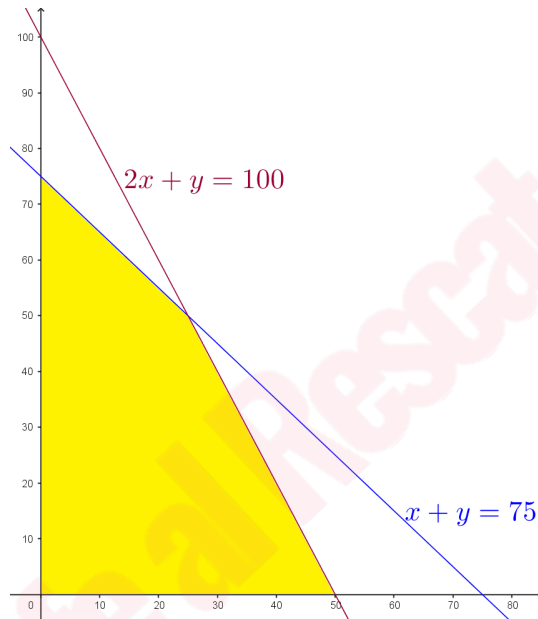
¿(0,0) cumple?

$$2 \cdot 0 + 0 \leq 100 \quad \text{Sí}$$

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.



Vértices de la región factible:

los que obtuvimos en los cálculos para la representación son $A(0, 0)$, $B(0, 75)$ y $D(50, 0)$.

Punto C, corte entre (a) y (b):

$$\begin{cases} x + y = 75 \\ 2x + y = 100 \end{cases} \quad \begin{matrix} -1x \\ 2^a \end{matrix} \begin{cases} -x - y = -75 \\ 2x + y = 100 \end{cases}$$

$$\text{Sumando: } x = 25$$

Sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación: $25 + y = 75$; $y = 75 - 25$; $y = 50 \rightarrow C(25, 50)$

El máximo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los extremos de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x, y	$z = 110x + 90y$	
$0, 0$	$110 \cdot 0 + 90 \cdot 0 = 0$	
$0, 75$	$110 \cdot 0 + 90 \cdot 75 = 6750$	
$25, 50$	$110 \cdot 25 + 90 \cdot 50 = 7250$	máximo
$50, 0$	$110 \cdot 50 + 90 \cdot 0 = 5500$	

El máximo se alcanza en el punto $(25, 50)$

Por tanto,

a) Debe poner a la venta 25 entradas de tipo preferente y 50 estándar para obtener el máximo beneficio posible.

b) El beneficio máximo será de 7250€.

Problema 2. A. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+x}, & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2x+4, & \text{si } 4 \leq x < 8 \\ 3x+60-x^2, & \text{si } 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

Se pide:

- Estudiar la continuidad de la función en el intervalo $[0,9]$. (0,75 puntos)
- Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo $[0,9]$ (1,5 puntos)
- Calcular los puntos donde la función alcanza el máximo y el mínimo, y cuanto vale la función en esos puntos. (0,5 puntos)
- Calcular el área de la región delimitada por esta función, el eje OX , la recta de ecuación $x = 8$, la recta de ecuación $x = 9$. (0,75 puntos)

Solución:

a) Continuidad de esta función en el intervalo $[0,9]$.

En el intervalo $[0,4)$,

$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x}$, el problema de continuidad estaría donde se anule el denominador, $1+x=0$;

$x = -1$. Como $-1 \notin [0,4)$ $f(x)$ es continua en este intervalo.

Las otras dos definiciones de $f(x)$ son polinomios de 1ª o 2º grado, son continuas en sus correspondientes intervalos.

Los problemas para la continuidad de la función están en los cambios de definición.

Continuidad en $x = 4$,

a) $f(4) = 2 \cdot 4 + 4 = 12$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1+x^2}{1+x} = \frac{1+4^2}{1+4} = \frac{17}{5} \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (2x+4) = 2 \cdot 4 + 4 = 12 \end{cases} \neq \text{no existe } \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

Por tanto $f(x)$ no es continua en $x=4$

Continuidad en $x = 8$,

a) $f(8) = 3 \cdot 8 + 60 - 8^2 = 20$

b) $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} (2x+4) = 2 \cdot 8 + 4 = 20 \\ \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^+} (3x+60-x^2) = 3 \cdot 8 + 60 - 8^2 = 20 \end{cases} = 20$

c) $f(8) = \lim_{x \rightarrow 8} f(x)$

Por tanto $f(x)$ es continua en $x=8$

Solución: $f(x)$ es continua en $[0, 9] \sim \{4\}$ y en $x = 4$ tiene una discontinuidad de salto finito.

b) Crecimiento y decrecimiento de esta función en el intervalo $[0,9]$.

En el intervalo $(0,4)$,

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x}$$

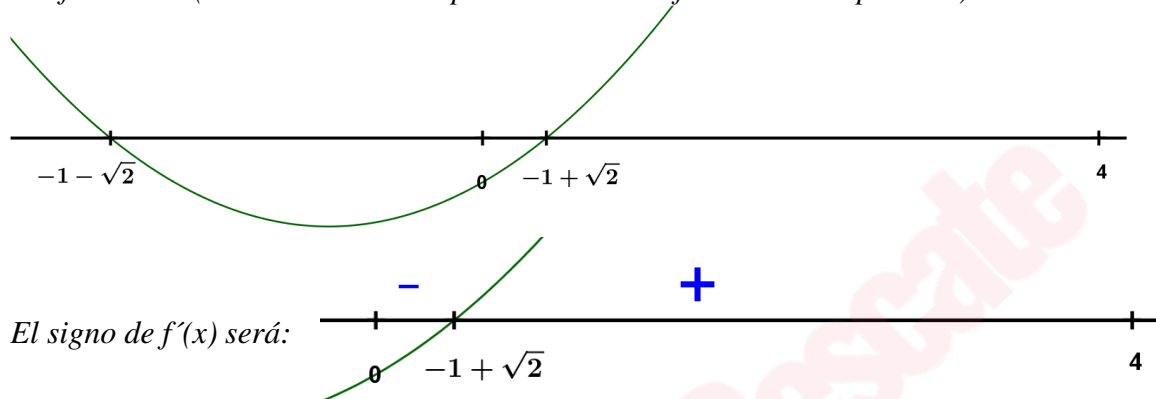
$$f'(x) = \frac{2x(1+x) - (1+x^2)1}{(1+x)^2} = \frac{2x+2x^2-1-x^2}{(1+x)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(1+x)^2}$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$;

Como el denominador es una expresión al cuadrado será positivo; debemos estudiar el signo del numerador:

$$x^2 + 2x - 1 = 0; \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} = \begin{cases} -1 + \sqrt{2} \cong 0.41 \in (0,4) \\ -1 - \sqrt{2} \cong -2.41 \notin (0,4) \end{cases}$$

Gráficamente $(x^2 + 2x - 1)$ es una parábola con coeficiente de x^2 positivo)



En el intervalo $(4,8)$,

$f(x) = 2x + 4$, polinomio de primer grado con coeficiente de x positivo por tanto creciente.

En el intervalo $(8,9)$,

$$f(x) = -x^2 + 3x + 60$$

$$f'(x) = -2x + 3; \quad -2x + 3 = 0; \quad 2x = 3; \quad x = \frac{3}{2} = 1.5$$

Signo de $f'(x)$:

a la izquierda de 1.5: $f'(0) = -2 \cdot 0 + 3 = 3$ positivo

a la derecha de 1.5: $f'(3) = -2 \cdot 3 + 3 = -3$ negativo

Por tanto en el intervalo $(8,9)$ $f'(x) < 0$, luego $f(x)$ decreciente.

Finalmente, $f(x)$ es creciente en $(-1 + \sqrt{2}, 4) \cup (4, 8)$ y es decreciente en $(0, -1 + \sqrt{2}) \cup (8, 9)$.

c) Calcular los puntos donde la función alcanza el máximo y el mínimo, y cuanto vale la función en esos puntos.

De la función sabemos que es continua en $[0, 9] \sim \{4\}$ y que es creciente en $(-1 + \sqrt{2}, 4) \cup (4, 8)$ y es decreciente en $(0, -1 + \sqrt{2}) \cup (8, 9)$.

Representemos gráficamente la función

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x} \begin{cases} f(0) = \frac{1+0^2}{1+0} = 1 \\ f(-1 + \sqrt{2}) = \frac{1+(-1 + \sqrt{2})^2}{1+(-1 + \sqrt{2})} = \frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -2 + 2\sqrt{2} \cong 0.8284 \\ f(4) = \frac{1+4^2}{1+4} = \frac{17}{5} = 3.4 \end{cases}$$

Según vimos en el apartado anterior, a la izquierda de $-1 + \sqrt{2}$ $f(x)$ es decreciente y a su derecha creciente por tanto en $x = -1 + \sqrt{2}$ $f(x)$ tiene un mínimo local.

$$f(x) = 2x + 4 \quad \begin{cases} f(4) = 2 \cdot 4 + 4 = 12 \\ f(8) = 2 \cdot 8 + 4 = 20 \end{cases}$$

$$f(x) = 3x + 60 - x^2 \quad \begin{cases} f(8) = 3 \cdot 8 + 60 - 8^2 = 20 \\ f(9) = 3 \cdot 9 + 60 - 9^2 = 6 \end{cases}$$

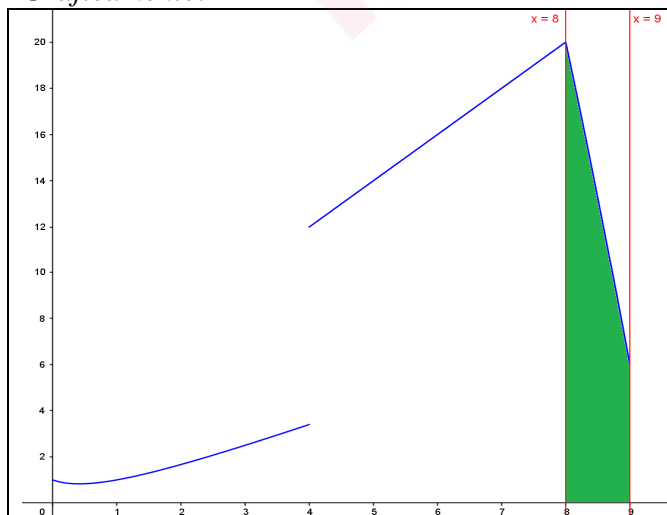


Solución: la función alcanza un mínimo en $x = -1 + \sqrt{2}$ y $f(-1 + \sqrt{2}) = -2 + 2\sqrt{2}$.

La función alcanza un máximo en $x = 8$ y $f(8) = 20$.

- d) Área de la región delimitada por $f(x)$, el eje OX , la recta de ecuación $x = 8$, la recta de ecuación $x = 9$.
Entre $x = 8$ y $x = 9$ la definición de $f(x)$ es $3x + 60 - x^2$.

Gráficamente:



El área pedida la obtenemos mediante la siguiente integral:

$$\begin{aligned} \int_8^9 (3x + 60 - x^2) dx &= \left[3 \frac{x^2}{2} + 60x - \frac{x^3}{3} \right]_8^9 = \\ &= \left(3 \frac{9^2}{2} + 60 \cdot 9 - \frac{9^3}{3} \right) - \left(3 \frac{8^2}{2} + 60 \cdot 8 - \frac{8^3}{3} \right) = \\ &= \frac{837}{2} - \frac{1216}{3} = \frac{79}{6} \approx 13.1667 \end{aligned}$$

Solución: el área de la región indicada mide $\frac{79}{6}$ u.a.

Problema 2. B. Cuando la temperatura de un invernadero se mantiene a x grados centígrados, siendo x un número real entre 10 y 30, la producción (en kilogramos) de cierta hortaliza viene dada por la función $Q(x) = 30x^2 + Ax + B - x^3$. Sabemos que la producción máxima se alcanza cuando el invernadero se mantiene a 21 grados centígrados, y que dicha producción máxima es 5.300 kg.

- a) Determina los valores A y B que aparecen en la función $Q(x)$. (0,75 puntos)
 b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $Q(x)$. (1 punto)
 c) Para valores de la temperatura comprendidos entre 10 y 30 grados centígrados, ¿en algún caso se obtiene una producción inferior a 1.000 kg? (1 punto)

Solución:

$$Q(x) = 30x^2 + Ax + B - x^3 \quad x \in [10, 30].$$

a)

De los datos del problema “la producción máxima se alcanza para $x = 21$ y es de 5300”, entonces, para $x = 21$ $Q'(21) = 0$ y $Q(21) = 5300$

$$Q'(x) = 60x + A - 3x^2; \quad Q'(21) = 60 \cdot 21 + A - 3 \cdot 21^2 = A - 63 \quad \text{entonces} \quad A - 63 = 0; \quad A = 63$$

$$Q(21) = 5300; \quad 5300 = 30 \cdot 21^2 + 63 \cdot 21 + B - 21^3; \quad B + 5292 = 5300; \quad B = 5300 - 5292 = 8$$

Solución: $A = 63$ y $B = 8$. $Q(x) = 30x^2 + 63x + 8 - x^3 \quad x \in [10, 30]$.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $Q(x)$.

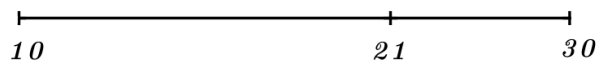
Debemos estudiar el signo de $Q'(x)$.

$$Q(x) = 30x^2 + 63x + 8 - x^3 \rightarrow Q'(x) = 60x + 63 - 3x^2$$

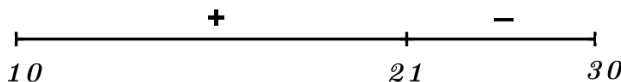
$$Q'(x) = 0; \quad 60x + 63 - 3x^2 = 0; \quad -3x^2 + 60x + 63 = 0;$$

$$x = \frac{-60 \pm \sqrt{60^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 63}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-60 \pm 66}{-6} = \begin{cases} x_1 = \frac{-60+66}{-6} = -1 \\ x_2 = \frac{-60-66}{-6} = 21 \end{cases}$$

Debemos estudiar el signo de $Q'(x)$ en los intervalos:



	$Q'(x) =$
15	$-3 \cdot 15^2 + 60 \cdot 15 + 63 = 288 > 0$
25	$-3 \cdot 25^2 + 60 \cdot 25 + 63 = -312 < 0$



Solución: $Q(x)$ es creciente en $(10, 21)$ y decreciente en $(21, 30)$.

c) Para valores de la temperatura comprendidos entre 10 y 30 grados centígrados, ¿en algún caso se obtiene una producción inferior a 1.000 kg?

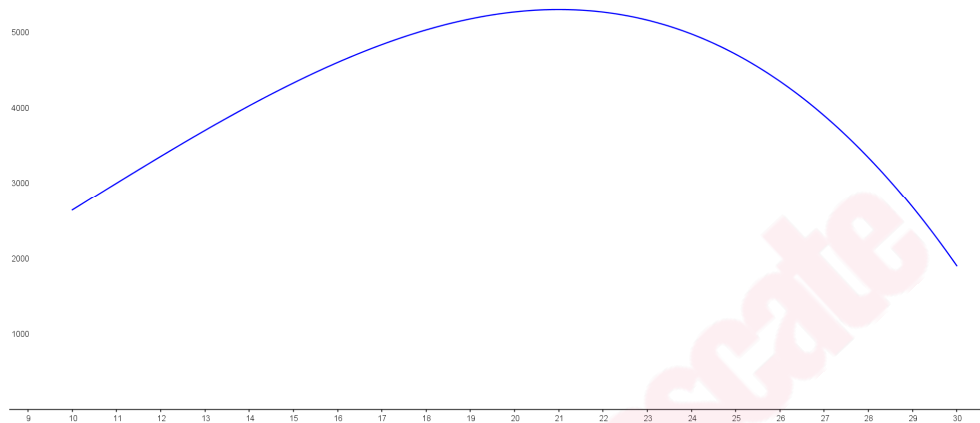
De los datos del enunciado sabemos que $Q(21) = 5300$. Calculemos el valor de Q en los extremos del intervalo:

$$Q(10) = 30 \cdot 10^2 + 63 \cdot 10 + 8 - 10^3 = 2638$$

$$Q(30) = 30 \cdot 30^2 + 63 \cdot 30 + 8 - 30^3 = 1898$$

Considerando que $Q(x)$ es creciente en $(10, 21)$ y decreciente en $(21, 30)$ el valor mínimo de $Q(x)$ se alcanzará en los extremos del intervalo (el valor mínimo es 1898). Por lo tanto, nunca se obtendrá una producción inferior a 1000 kg.

Gráficamente:



Solución: para valores de la temperatura comprendidos entre 10 y 30 grados centígrados, nunca se obtiene una producción inferior a 1.000 kg.

Problema 3. Una empresa juguetera vende cajas con canicas. La empresa produce un 60% de canicas blancas y un 40% de canicas rojas, y cuando elabora una caja introduce al azar canicas blancas y rojas entre las producidas por la empresa.

- Si una caja tiene 6 canicas, calcula la probabilidad de que la caja contenga el mismo número de canicas blancas que de rojas. (0,75 puntos)
- Si una caja tiene 100 canicas, calcula aproximadamente la probabilidad de que la caja tenga al menos 57 canicas blancas. (0,75 puntos)
- El peso (en gramos) de las canicas blancas tiene distribución normal con media 10 y varianza 0.04. Calcula la probabilidad de que el peso de una canica blanca esté comprendido entre 9,95 y 10,15 gramos. (0,75 puntos)
- El peso (en gramos) de las canicas rojas tiene distribución normal con media 11 y varianza 0.09. Si una canica roja es tal que exactamente el 87,7% de las canicas rojas producidas pesan menos que ella, ¿cuánto pesa esta canica? (0,75 puntos)

Solución:

- a) Si una caja tiene 6 canicas, calcula la probabilidad de que la caja contenga el mismo número de canicas blancas que de rojas.

Como sabemos la empresa produce un 60% de canicas blancas y un 40% de canicas rojas, y cuando elabora una caja introduce al azar canicas blancas y rojas entre las producidas por la empresa. Por lo tanto $P(\text{obtener canica blanca}) = 0'6$ y $P(\text{obtener canica roja}) = 0'4$.

Considerando la variable $X = \text{número de canicas blancas en una caja de seis canicas}$.

$$X = B(6, 0'6) \rightarrow n = 6, p = 0'6 \text{ y } q = 0'4$$

$$P(\text{la caja contenga el mismo número de canicas blancas que de rojas}) = P(X = 3) = \binom{6}{3} 0'6^3 0'4^3 = 0'2765$$

Solución: la probabilidad de que la caja contenga el mismo número de canicas blancas que de rojas es de 0'2765.

- b) Si una caja tiene 100 canicas, calcula aproximadamente la probabilidad de que la caja tenga al menos 57 canicas blancas.

Considerando la variable $X = \text{número de canicas blancas en una caja de cien canicas}$.

$$X = B(100, 0'6) \rightarrow n = 100, p = 0'6 \text{ y } q = 0'4$$

La probabilidad a calcular es: $P(\text{la caja tenga al menos 57 canicas blancas}) = P(X \geq 57)$, pero esta probabilidad no podemos obtenerla de la tabla de la binomial.

Aproximamos la variable X a una normal.

$$\mu = np = 100 \cdot 0'6 = 60 \text{ y } \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0'6 \cdot 0'4} = 4'8990 \rightarrow X \cong Y = N(60, 4'8990)$$

$$\text{Por tanto, } P(X \geq 57) = P(Y \geq 56'5) = P\left(Z \geq \frac{56'5 - 60}{4'8990}\right) = P(Z \geq -0'71) = P(Z \leq 0'71) = 0'7611$$

La última probabilidad la obtenemos de la tabla de la distribución normal:

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133

Solución: la probabilidad de que la caja contenga al menos 57 canicas blancas es de 0'7611.

c) El peso (en gramos) de las canicas blancas tiene distribución normal con media 10 y varianza 0.04. Calcula la probabilidad de que el peso de una canica blanca esté comprendido entre 9,95 y 10,15 gramos.

Consideremos la variable $X = \text{peso (en gramos) de las canicas blancas} \rightarrow X = N(\mu, \sigma)$

De los datos del problema, la media es 10 $\rightarrow \mu = 10$ y la varianza es 0.04 $\rightarrow \sigma = \sqrt{0.04} = 0.2$

$$\begin{aligned} \text{La probabilidad pedida es } P(9.95 \leq X \leq 10.15) &= P\left(\frac{9.95 - 10}{0.2} \leq Z \leq \frac{10.15 - 10}{0.2}\right) = P(-0.25 \leq Z \leq 0.75) = \\ &= P(Z \leq 0.75) - P(Z \leq -0.25) = P(Z \leq 0.75) - [1 - P(Z \leq 0.25)] = 0.7734 - (1 - 0.5987) = 0.3721 \end{aligned}$$

Solución: la probabilidad de que el peso de una canica blanca esté comprendido entre 9,95 y 10,15 gramos es de 0.3721.

d) El peso (en gramos) de las canicas rojas tiene distribución normal con media 11 y varianza 0.09. Si una canica roja es tal que exactamente el 87,7% de las canicas rojas producidas pesan menos que ella, ¿cuánto pesa esta canica?

Consideremos la variable $X = \text{peso (en gramos) de las canicas rojas} \rightarrow X = N(\mu, \sigma)$

De los datos del problema, la media es 11 $\rightarrow \mu = 11$ y la varianza es 0.09 $\rightarrow \sigma = \sqrt{0.09} = 0.3$

Sea a el peso de la canica, debe cumplirse que $P(X \leq a) = 0.877$, normalizando:

$$P\left(Z \leq \frac{a - 11}{0.3}\right) = 0.877, \text{ mirando la tabla de la normal}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177

$$\begin{aligned} \frac{a - 11}{0.3} &= 1.16 \rightarrow a - 11 = 1.16 \cdot 0.3 \\ a &= 11 + 1.16 \cdot 0.3 = 11.348 \end{aligned}$$

Solución: esa canica pesa 11.348 gramos.