

Modelo 3 de 2020

Resolución completa de los ocho ejercicios, con desarrollo matemático y resultados exactos.

Ejercicio 1

El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Dividiendo, $f(x) = x + x/(x^2 - 1)$; como el segundo término tiende a cero, la asíntota oblicua es $y = x$. En $x = 1$ y $x = -1$ el denominador se anula y el numerador no, así que ambas son asíntotas verticales. No hay horizontal.

La derivada es

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}.$$

El denominador es positivo y x^2 no cambia de signo; por tanto $f' > 0$ si $|x| > \sqrt{3}$ y $f' < 0$ si $|x| < \sqrt{3}$, salvo que $f'(0) = 0$ sin cambio de signo. La función crece en $(-\infty, -\sqrt{3})$ y $(\sqrt{3}, +\infty)$, y decrece en $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \sqrt{3})$. Hay un máximo relativo en $(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}/2)$ y un mínimo en $(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}/2)$.

Ejercicio 2

Integramos $f''(x) = e^x(x + 2)$:

$$f'(x) = e^x(x + 1) + C_1.$$

La condición $f'(0) = 1$ da $C_1 = 0$. Integrando de nuevo, $f(x) = xe^x + C_2$. De $f(0) = 1$ se obtiene $C_2 = 1$. La única función es $f(x) = xe^x + 1$.

Ejercicio 3

Las dimensiones de A y B son 2×3 y 3×2 . Calculamos

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & m+1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(AB) = -2m.$$

Así, AB no tiene inversa cuando $m = 0$. En cambio, BA es de orden 3 y su rango no puede superar 2 (es producto de una matriz 3×2 por una 2×3), por lo que nunca es invertible.

Para $m = 0$,

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El sistema $BAX = C$ equivale a $2x + y + z = 2$ y $3x + y + 2z = 3$, pues la segunda fila repite la primera con signo cambiado. De estas ecuaciones, $x + z = 1$ y $x + y = 1$. Añadiendo $x + y + z = 0$, se obtiene $x = 2, y = -1, z = -1$. Una solución que cumple la condición es $(2, -1, -1)$.

Ejercicio 4

El volumen es un sexto del determinante de las tres aristas que parten de A :

$$6V = |\det(B - A, C - A, D - A)| = |-t(t - 1)|.$$

Imponer $V = 5$ equivale a $|t(t - 1)| = 30$. La ecuación $t^2 - t = 30$ da $t = 6$ o $t = -5$; la alternativa $t^2 - t = -30$ no tiene soluciones reales. Por tanto, $t = -5, 6$.

Para $t = 0$, $A = (0, 2, -1)$. La distancia de un punto a la recta BC se calcula mediante $|\vec{BA} \times \vec{BC}|/|\vec{BC}|$. Aquí $\vec{BA} = (0, 1, -2)$ y $\vec{BC} = (-1, -1, 1)$; su producto vectorial es $(-1, 2, 1)$, de módulo $\sqrt{6}$, mientras que $|\vec{BC}| = \sqrt{3}$. Así,

$$d(A, BC) = \sqrt{2}.$$

Ejercicio 5

El punto crítico en $x = 0$ implica $f'(0) = c = 0$, y $f(0) = d = 3$. La tangente en $x = 1$ es $y = -2x + 2$: debe pasar por $(1, f(1))$, así que $a + b + c + d = 0$, luego $a + b = -3$. Su pendiente es $f'(1) = 3a + 2b + c = -2$. Resolviendo, $a = 4$ y $b = -7$. Por tanto, $(a, b, c, d) = (4, -7, 0, 3)$.

Ejercicio 6

La parábola corta al eje x en 0 y $2a/3$. Como abre hacia arriba, queda por debajo del eje entre esos puntos; el área es

$$S = \int_0^{2a/3} (2ax - 3x^2) dx = \frac{4a^3}{27}.$$

Al imponer $S = 4$ y $a > 0$, resulta $a^3 = 27$, de modo que $a = 3$.

Ejercicio 7

Para $X^3AX = B^2$, tomamos determinantes:

$$(\det X)^3 \det A \det X = \det(B)^2.$$

Como $\det A = 1$ y $\det B = -2$, se obtiene $(\det X)^4 = 4$, así que los valores reales posibles son $\det X = \pm\sqrt{2}$.

La ecuación $A^2YB^{-1} = A$ se resuelve multiplicando por A^{-2} a la izquierda y por B a la derecha. Como A y B son invertibles, $Y = A^{-1}B$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 8

Para reflejar A respecto de π_1 , usamos su normal $\vec{n} = (2, -1, -1)$. El valor $2x - y - z + 5$ en $A = (0, 1, -2)$ es 6 y $|\vec{n}|^2 = 6$, por lo que el pie de la perpendicular es $H = A - \vec{n} = (-2, 2, -1)$. El simétrico vale $A' = 2H - A = (-4, 3, 0)$.

Una recta paralela a ambos planos debe tener un director perpendicular a sus normales $(2, -1, -1)$ y $(1, 5, -6)$. El producto vectorial es proporcional a $(1, 1, 1)$. Al pasar por A , su forma paramétrica es

$$(x, y, z) = (0, 1, -2) + t(1, 1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$