

PROBLEMA A.1. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- La matriz inversa de la matriz A . (2 puntos)
- Las matrices X e Y de orden 2×2 tales que $XA = B$ y $AY = B$. (2 + 2 puntos)
- Justificar razonadamente** que si M una matriz cuadrada tal que $M^2 = I$, donde I es la matriz identidad del mismo orden que M , entonces se verifica la igualdad $M^3 = M$. (4 puntos)

Solución:

a) A^{-1} ?

Comprobemos si existe A^{-1} .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 6 = 8 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

Calculemos A^{-1} ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/8 & 3/8 \\ -2/8 & 1/8 \end{pmatrix}, \text{ simplificando las fracciones:}$$

$$\text{Solución: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 \\ -1/4 & 1/8 \end{pmatrix}$$

b) ¿ X ? / $XA = B$

En el apartado anterior hemos obtenido A^{-1} . Multiplicando por A^{-1} por la derecha:

$$XA A^{-1} = B A^{-1} \rightarrow X I = B A^{-1} \rightarrow X = B A^{-1}, \text{ por lo que}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/8 & 3/8 \\ -2/8 & 1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{8} - \frac{6}{8} & \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \\ \frac{4}{8} - \frac{4}{8} & \frac{6}{8} - \frac{2}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/8 & 6/8 \\ 8/8 & 4/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

¿ Y ? / $AY = B$, multiplicando por A^{-1} por la izquierda:

$$A^{-1} A Y = A^{-1} B \rightarrow I Y = A^{-1} B \rightarrow Y = A^{-1} B, \text{ luego:}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 2/8 & 3/8 \\ -2/8 & 1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{8} + \frac{6}{8} & \frac{6}{8} - \frac{6}{8} \\ -\frac{2}{8} + \frac{2}{8} & -\frac{6}{8} - \frac{2}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/8 & 0 \\ 0 & -8/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Sea M una matriz cuadrada / $M^2 = I$, ¿ $M^3 = M^7$?

Podemos resolverlo de dos formas diferentes:

*) Calculemos, por separado, M^3 y M^7

$$\left. \begin{array}{l} M^3 = M^2 M = (\text{como } M^2 = I) = I M = M \\ M^7 = M^2 M^2 M^2 M = I I I M = M \end{array} \right\} \rightarrow M^3 = M^7 \quad \text{c.q.c.}$$

**) Veamos si a partir de M^7 llegamos a M^3 ,

$$M^7 = M^2 M^2 M^3 = I I M^3 = M^3 \quad \text{c.q.c.}$$

Tu Profecia al Rescate

PROBLEMA A.2. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La ecuación del plano π que pasa por el punto $P(2, 0, 1)$ y es perpendicular a la recta $r: \begin{cases} x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ (3 puntos)
- b) Las coordenadas del punto Q situado en la intersección de la recta r y del plano π . (2 puntos)
- c) La distancia del punto P a la recta r (3 puntos) y justificar razonadamente que la distancia del punto P a un punto cualquiera de la recta r es mayor o igual que $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. (2 puntos)

Solución:

a) ¿plano π ? / $P \in \pi$ y $\pi \perp r$ Como $\pi \perp r$ un vector normal del plano π es un vector director de la recta r .Obtenemos un vector director de r . Pasemos a paramétricas la ecuación de la recta r ,

$$r: \begin{cases} x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} P_r(0, 0, 0) \\ \vec{v}_r(-2, 1, 0) \end{cases}$$

Por tanto del plano π conocemos $\begin{cases} \text{punto } P(2, 0, 1) \\ \vec{n}_\pi(-2, 1, 0) \end{cases}$

La ecuación del plano π será: $-2x + y + 0 \cdot z + D = 0 \rightarrow -2x + y + D = 0$ Determinamos el valor de D con la condición de que el punto P es del plano,

$$-2 \cdot 2 + 0 + D = 0 \rightarrow -4 + D = 0 \rightarrow D = 4$$

$$\text{Finalmente, } \pi: -2x + y + 4 = 0 \quad \text{o} \quad \pi: 2x - y - 4 = 0$$

b) ¿Punto Q ? / $Q = r \cap \pi$ Para obtener el punto Q resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta r y el plano π ,

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ z = 0 \\ -2x + y + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{este sistema nos da el valor de } z \text{ (} z = 0 \text{)}; \text{ obtendremos los valores de } x \text{ e } y$$

resolviendo el sistema formado por la 1ª y 3ª ecuaciones.

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -2x + y + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -2x + y = -4 \end{cases} \quad \text{despejando } x \text{ de la 1ª ecuación: } x = -2y$$

$$\text{y sustituyendo en la 2ª: } -2(-2y) + y = -4 \rightarrow 4y + y = -4 \rightarrow 5y = -4 \rightarrow y = \frac{-4}{5}$$

$$\text{luego, } x = -2\left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{8}{5}$$

$$\text{Finalmente, } Q\left(\frac{8}{5}, \frac{-4}{5}, 0\right)$$

c) ¿ $d(P, r)$?

Los cálculos realizados en los apartados anteriores, plano π (que es perpendicular a r por P) y punto Q (corte entre r y π) son los que corresponden para calcular $d(P, r) = d(P, Q)$. Por tanto

$$d(P, r) = d(P, Q) = \sqrt{\left(2 - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(0 - \frac{-4}{5}\right)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{16}{25} + 1} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \text{ u.l.}$$

También podemos calcular la distancia pedida por la fórmula correspondiente,

$$d(P, r) = \frac{|\vec{P_r P} \times \vec{v_r}|}{|\vec{v_r}|} \quad \left. \begin{array}{l} P(2, 0, 1) \\ P_r(0, 0, 0) \in r \end{array} \right\} \rightarrow \vec{P_r P}(2, 0, 1) \text{ y } \vec{v_r}(-2, 1, 0) \{\text{obtenido en a)}\}$$

$$\vec{P_r P} \times \vec{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{k} - 2\vec{j} - \vec{i} = (-1, -2, 2)$$

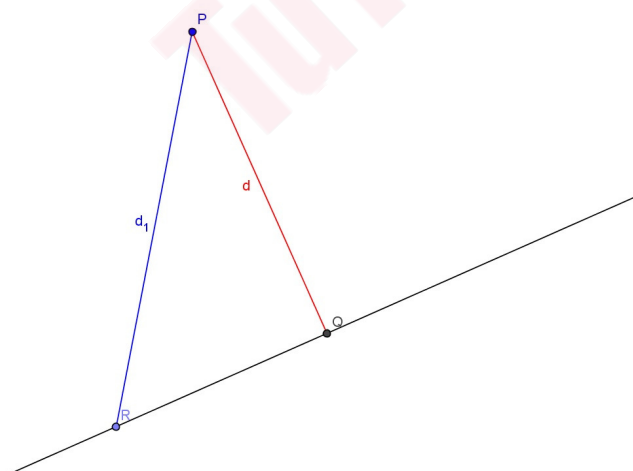
$$|\vec{P_r P} \times \vec{v_r}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{v_r}| = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (0)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$\text{Luego, } d(P, r) = \frac{|\vec{P_r P} \times \vec{v_r}|}{|\vec{v_r}|} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \text{ u.l.}$$

La justificación de que la distancia del punto P a un punto cualquiera de la recta r es mayor o igual que $\frac{3\sqrt{5}}{5}$, viene de la definición de distancia de punto a recta como la menor de las distancias del punto a cualquier otro de la recta.

Otra justificación. Gráficamente la distancia del punto P a la recta r se mide en perpendicular,



La distancia de P a cualquier punto de la recta r (distinto de Q), como se observa en el gráfico, sería la hipotenusa del triángulo rectángulo PQR ; por tanto d_1 (hipotenusa) $>$ d (cateto). Es decir, $d(P, R) > d(P, Q) = d(P, r)$

$$\text{Luego, } d(P, R) \geq \frac{3\sqrt{5}}{5} \text{ c.q.c}$$

Una última forma de justificación sería estudiar la monotonía de la función $d(P, R)$ siendo R un punto cualquiera de la recta r .

Según obtuvimos en el apartado a), de la ecuación paramétrica de r se deduce que cualquier punto de la recta r será: $(-2\lambda, \lambda, 0)$ y como $P(2, 0, 1)$,

$$d(P, R) = \sqrt{(2 + 2\lambda)^2 + (0 - \lambda)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{4 + 8\lambda + 4\lambda^2 + \lambda^2 + 1} = \sqrt{5 + 8\lambda + 5\lambda^2}$$

Por cálculo el radicando es una suma de términos al cuadrado, luego para cualquier valor de λ este radicando es positivo. Podemos estudiar la monotonía de $d(P, R)$ estudiando la monotonía del radicando, es decir,

$$y = 5 + 8\lambda + 5\lambda^2$$

$$y' = 8 + 10\lambda$$

$$8 + 10\lambda = 0 \rightarrow 10\lambda = -8 \rightarrow \lambda = \frac{-8}{10} = \frac{-4}{5}$$

Como $8 + 10\lambda$ es, gráficamente, una recta de pendiente positiva, a la izquierda de $\frac{-4}{5}$ es negativa y a la derecha positiva. Por tanto para $\lambda = \frac{-4}{5}$ hay un mínimo relativo, que por lo dicho anteriormente es el absoluto de $d(P, R)$.

$$\text{Para } \lambda = \frac{-4}{5}, \begin{cases} x = -2\frac{-4}{5} = \frac{16}{5} \\ y = \frac{-4}{5} \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow R\left(\frac{16}{5}, \frac{-4}{5}, 0\right)$$

La mínima distancia es:

$$d(P, R) = \sqrt{\left(2 - \frac{16}{5}\right)^2 + \left(0 - \frac{-4}{5}\right)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{16}{25} + 1} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

Por tanto, para cualquier punto de la recta r $d(P, R) \geq \frac{3\sqrt{5}}{5}$ c.q.c.

PROBLEMA A.3. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función real f definida por $f(x) = (x-1)(x-3)$, siendo x un número real. (3 puntos)
- b) El área del recinto acotado limitado entre las curvas $y = (x-1)(x-3)$ e $y = -(x-1)(x-3)$. (4 puntos)
- c) El valor positivo de a para el cual el área limitada entre la curva $y = a(x-1)(x-3)$, el eje Y y el segmento que une los puntos $(0, 0)$ y $(1, 0)$ es $4/3$. (3 puntos)

Solución:

- a) Para obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función tenemos que estudiar el signo de $f'(x)$.

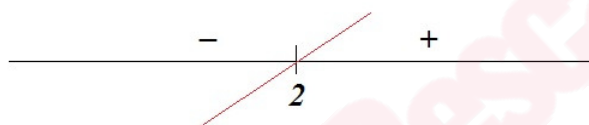
$$f(x) = (x-1)(x-3), \text{ efectuando las operaciones: } f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$, por ser una función polinómica.

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$2x - 4 = 0; \quad 2x = 4; \quad x = 2$$

Para obtener el signo de $f'(x)$ consideremos que $f'(x)$ es un polinomio de primer grado con coeficiente de x positivo cuya raíz es $x = 2$, es decir:



Por tanto, $f(x)$ es creciente en $(2, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 2)$

- b) Área del recinto acotado limitado entre las curvas

$$y = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3 \quad \text{e}$$

$$y = -(x-1)(x-3) = -x^2 + 4x - 3$$

Busquemos los puntos de corte entre las dos curvas:

$$x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 4x - 3$$

$$2x^2 - 8x + 6 = 0; \text{ simplificando entre dos: } x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \rightarrow$$

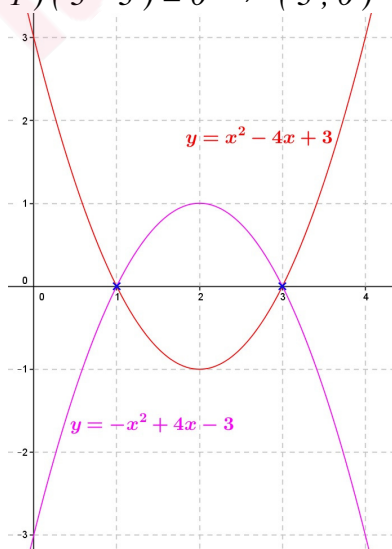
$$\begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=1 \\ x-3=0 \rightarrow x=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=1 \\ x-3=0 \rightarrow x=3 \end{cases}$$

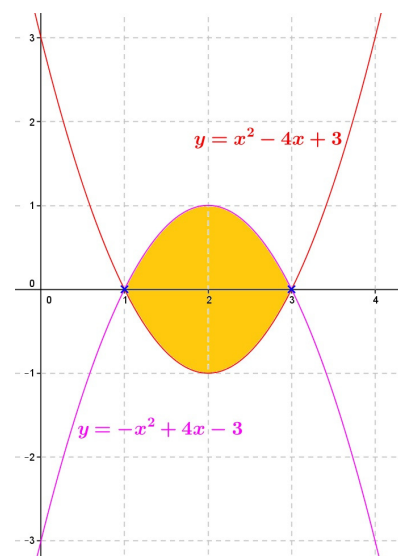
$$\text{Para } x=1, \quad y = (1-1)(1-3) = 0 \rightarrow (1, 0)$$

$$\text{Para } x=3, \quad y = (3-1)(3-3) = 0 \rightarrow (3, 0)$$

Como las dos curvas son parábolas, podemos realizar la representación gráfica rápidamente:



El área pedida será:



Esta área la obtenemos a partir del siguiente cálculo integral:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^3 [(-x^2 + 4x - 3) - (x^2 - 4x + 3)] dx = \int_1^3 [-2x^2 + 8x - 6] dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - 6x \right]_1^3 = \\
 &= \left[-\frac{2x^3}{3} + 4x^2 - 6x \right]_1^3 = \left(-\frac{2 \cdot 3^3}{3} + 4 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 \right) - \left(-\frac{2 \cdot 1^3}{3} + 4 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 \right) = (-18 + 36 - 18) - \left(-\frac{2}{3} + 4 - 6 \right) = \\
 &= 0 - \left(-\frac{2}{3} - 2 \right) = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3} \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

Solución: $A = \frac{8}{3} \text{ u.a.}$

c) El valor positivo de a para el cual el área limitada entre la curva $y = a(x-1)(x-3)$, el eje Y y el segmento que une los puntos $(0, 0)$ y $(1, 0)$ es $4/3$.

Representación gráfica del problema.

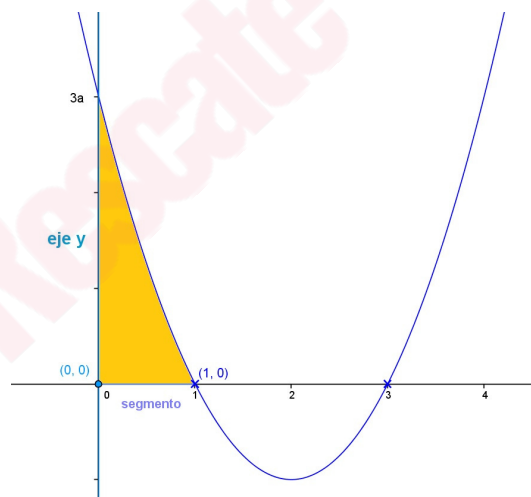
$y = a(x-1)(x-3) = a(x^2 - 4x + 3)$, como el valor de a deber ser positivo la parábola tiene la forma:

U

Calculamos algunos valores para representar la parábola

x	y
1	0
3	0
0	$3a$

Añadiendo el segmento que une los puntos $(0, 0)$ y $(1, 0)$ y el eje Y . El área que queremos calcular es:



Esta área la calculamos mediante la integral:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 a(x^2 - 4x + 3) dx &= a \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx = a \left[\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 3x \right]_0^1 = a \left[\left(\frac{1^3}{3} - 4\frac{1^2}{2} + 3 \cdot 1 \right) - 0 \right] = a \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 \right) = \\
 &= a \left(\frac{1}{3} + 1 \right) = a \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

Como deber ser $a \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \rightarrow a = 1$

Solución: $a = 1$

PROBLEMA B.1. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (1-\alpha)x + (2\alpha+1)y + (2\alpha+2)z = \alpha \\ \alpha x + \alpha y = 2\alpha+2 \\ 2x + (\alpha+1)y + (\alpha-1)z = \alpha^2 - 2\alpha + 9 \end{cases}$$

Donde α es un parámetro real. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha = 1$. (3 puntos)
- La justificación razonada** de si el sistema es compatible o incompatible cuando $\alpha = 2$. (3 puntos)
- Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado. (4 puntos)

Solución:

a) ¿Soluciones para $\alpha = 1$?

Para $\alpha = 1$ el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} 3y + 4z = 1 \\ x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases} \quad \text{La matriz ampliada de este sistema es: } M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 8 \end{array} \right)$$

Calculemos el rango de M ,

$$\left. \begin{array}{l} |4| = 4 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M) \geq 1 \\ \left| \begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{array} \right| = -4 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M) \geq 2 \\ \left| \begin{array}{ccc} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array} \right| = (F_3 = 2 \cdot F_2) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(M) = 2$$

Calculemos el rango de M' ,

Considerando el estudio realizado anteriormente $\text{ran}(M') \geq 2$, el menor de orden 3 de M' por estudiar es:

$$\left| \begin{array}{ccc} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \end{array} \right| = (F_3 = 2 \cdot F_2) = 0 \rightarrow \text{ran}(M') = 2$$

Luego, $\text{ran}(M) = \text{ran}(M') = 2 < 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \rightarrow$ Es un sistema compatible indeterminado.

Para resolver el sistema utilizamos las ecuaciones e incógnitas correspondientes al menor de orden 2 no nulo. Es decir, 1ª y 2ª ecuación y como incógnitas z e y .

El sistema a resolver será:

$$\begin{cases} 3y + 4z = 1 \\ y = 4 - x \end{cases} \quad \text{sustituyendo el valor de } y \text{ que da la 2ª ecuación en la 1ª,}$$

$$3(4-x) + 4z = 1; \quad 12 - 3x + 4z = 1; \quad 4z = 1 - 12 + 3x; \quad 4z = -11 + 3x; \quad z = \frac{-11 + 3x}{4}$$

Finalmente, para $\alpha = 1$ las soluciones del sistema son:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = \frac{-11 + 3\lambda}{4} \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Para $\alpha = 2$ el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} -x + 5y + 6z = 2 \\ 2x + 2y = 6 \\ 2x + 3y + z = 9 \end{cases} \quad \text{La matriz ampliada de este sistema es: } N' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \end{array} \right)$$

Calculemos el rango de N ,

$$\left. \begin{aligned} &|-1| = -1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(N) \geq 1 \\ &\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 10 = -12 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(N) \geq 2 \\ &\begin{vmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 36 - 24 - 10 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{ran}(N) = 2$$

Calculemos el rango de N' ,

Considerando el estudio realizado anteriormente $\text{ran}(N') \geq 2$, el menor de orden 3 de N' por estudiar es:

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -18 + 12 + 60 - 8 + 18 - 90 = -26 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(N') = 3$$

Luego, $\text{ran}(N) = 2 \neq 3 = \text{ran}(N') \rightarrow$ Es un sistema incompatible.

Para $\alpha = 2$ el sistema es incompatible.

c) ¿Valores de α para los que es S.C.D.?

$$\begin{cases} (1-\alpha)x + (2\alpha+1)y + (2\alpha+2)z = \alpha \\ \alpha x + \alpha y = 2\alpha+2 \\ 2x + (\alpha+1)y + (\alpha-1)z = \alpha^2 - 2\alpha + 9 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{La matriz} \\ \text{ampliada} \\ \text{de este} \\ \text{sistema es:} \end{array} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1-\alpha & 2\alpha+1 & 2\alpha+2 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 0 & 2\alpha+2 \\ 2 & \alpha+1 & \alpha-1 & \alpha^2 - 2\alpha + 9 \end{array} \right)$$

La matriz de coeficientes, A , es 3×3 , por tanto el máximo rango de A es 3

La matriz ampliada, A' , es 3×4 , por tanto el máximo rango de A' es 3.

Empezamos estudiando la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-\alpha & 2\alpha+1 & 2\alpha+2 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 2 & \alpha+1 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\text{desarrollando por } F_2) = -\alpha \begin{vmatrix} 2\alpha+1 & 2\alpha+2 \\ \alpha+1 & \alpha-1 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} 1-\alpha & 2\alpha+2 \\ 2 & \alpha-1 \end{vmatrix} =$$

(multiplicamos los binomios correspondientes),

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2\alpha + 1}{\alpha - 1} \quad \frac{2\alpha + 2}{\alpha + 1} \quad \frac{\alpha - 1}{-\alpha + 1} \\ \frac{-2\alpha - 1}{2\alpha^2 + \alpha} \quad \frac{+2\alpha + 2}{2\alpha^2 + 2\alpha} \quad \frac{+\alpha - 1}{-\alpha^2 + \alpha} \\ \frac{2\alpha^2 - \alpha - 1}{2\alpha^2 - \alpha - 1} \quad \frac{2\alpha^2 + 4\alpha + 2}{2\alpha^2 + 4\alpha + 2} \quad \frac{-\alpha^2 + 2\alpha - 1}{-\alpha^2 + 2\alpha - 1} \end{array} \right\}$$

$$= -\alpha(2\alpha^2 - \alpha - 1 - 2\alpha^2 - 4\alpha - 2) + \alpha(-\alpha^2 + 2\alpha - 1 - 4\alpha - 4) = -\alpha(-5\alpha - 3) + \alpha(-\alpha^2 - 2\alpha - 5) = \\ = \alpha(5\alpha + 3 - \alpha^2 - 2\alpha - 5) = \alpha(-\alpha^2 + 3\alpha - 2)$$

$$\alpha(-\alpha^2 + 3\alpha - 2) = 0 \begin{cases} \alpha = 0 \\ -\alpha^2 + 3\alpha - 2 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación de 2º grado por Ruffini,

$$\begin{array}{r|rrr} & -1 & 3 & -2 \\ 1 & & -1 & 2 \\ \hline & -1 & 2 & 0 \\ 2 & & -2 & \\ \hline & -1 & 0 & \end{array} \rightarrow \alpha_1 = 1 \text{ y } \alpha_2 = 2$$

Luego, para $\alpha \neq 0, 1, 2$ $\text{ran}(A) = 3$, como $\text{ran}(A') \geq \text{ran}(A)$ y $\text{ran}(A') \leq 3$, también $\text{ran}(A') = 3$; es decir, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ$ de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Sabemos que para $\alpha = 0, 1, 2$ el sistema no será compatible determinado, aunque es fácilmente justificable:

- Para $\alpha = 1$, visto en apartado a), S. C. Indeterminado
- Para $\alpha = 2$, visto en apartado b), S. Incompatible
- Para $\alpha = 0$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \end{array} \right) \quad F_2 \text{ es la ecuación } 0 = 2 \text{ (Falso), luego S. Incompatible}$$

Finalmente, el sistema es compatible y determinado para $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$

PROBLEMA B.2. Se dan las rectas $r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} 3y + 1 = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \end{cases}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- El plano paralelo a la recta s que contiene a la recta r . (3 puntos)
- La recta t que pasa por el punto $(0, 0, 0)$, sabiendo que un vector director de t es perpendicular a un vector director de r y también es perpendicular a un vector director de s . (3 puntos)
- Averiguar razonadamente** si existe o no un plano perpendicular a s que contenga a la recta r . (4 puntos)

Solución:

- a) ¿Plano paralelo a s que contiene a r ?

$\pi \parallel s \rightarrow \vec{v}_s$ será director de π

$r \subset \pi \rightarrow P_r \in \pi$ y $\vec{v}_r$ será director de π

Obtengamos los elementos de r y s necesarios. Nos interesa obtener las ecuaciones paramétricas de ambas rectas.

$$r: \begin{cases} x - y = -3 \\ 2x - z = -2 \end{cases} \quad \text{como} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \text{ despejamos } x \text{ e } y \text{ en función de } z.$$

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x = -2 + z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 - y}{1} \\ y = \frac{-2 + z}{2} \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = -1 + \frac{1}{2}\lambda \\ y = 2 + \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{Por tanto: } r: \begin{cases} P_r(-1, 2, 0) \\ \vec{v}_r\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \approx (1, 1, 2) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} 3y + 1 = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3y = -1 \\ x = 3 + 2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{-1}{3} \\ x = 3 + 2z \end{cases} \rightarrow s: \begin{cases} x = 3 + 2\mu \\ y = \frac{-1}{3} \\ z = \mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

$$\text{Por tanto: } s: \begin{cases} P_s\left(3, \frac{-1}{3}, 0\right) \\ \vec{v}_s(2, 0, 1) \end{cases}$$

Luego, del plano π conocemos: punto $P_r(-1, 2, 0)$ y vectores directores $\vec{v}_r(1, 1, 2)$ y $\vec{v}_s(2, 0, 1)$

La ecuación del plano π será:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x+1+4(y-2)-2z-(y-2)=0$$

$$x+1+4y-8-2z-y+2=0$$

$$x+3y-2z-5=0$$

Solución: $\pi: x+3y-2z-5=0$

b) ¿recta t ? / $(0,0,0) \in t$ y $\vec{v}_t \perp \left(\begin{matrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \end{matrix} \right)$

$$\vec{v}_t \perp \left(\begin{matrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \end{matrix} \right), \text{ por lo tanto } \vec{v}_t = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k} - \vec{j} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} = (1, 3, -2)$$

Y la ecuación paramétrica de la recta t será:

$$t: \begin{cases} x=0+\lambda \\ y=0+3\lambda \\ z=0-2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow t: \begin{cases} x=\lambda \\ y=3\lambda \\ z=-2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Solución: $t: \begin{cases} x=\lambda \\ y=3\lambda \\ z=-2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

c) ¿Existe un plano π / $s \perp \pi$ y $r \subset \pi$?

Como $s \perp \pi \rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{v}_s = (2, 0, 1) \left[\vec{n}_\pi \text{ vector perpendicular al plano } \pi \right]$

Como $r \subset \pi \rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$

Veamos si esto último es cierto,

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (1, 1, 2) \cdot (2, 0, 1) = 2 + 0 + 2 = 4 \neq 0, \text{ por tanto estos vectores no son perpendiculares.}$$

En conclusión, **el plano π pedido no existe.**

PROBLEMA B.3. Un pueblo está situado en el punto A (0, 4) de un sistema de referencia cartesiano. El tramo de un río situado en el término municipal del pueblo describe la curva

$$y = \frac{x^2}{4}, \quad \text{siendo } -6 \leq x \leq 6.$$

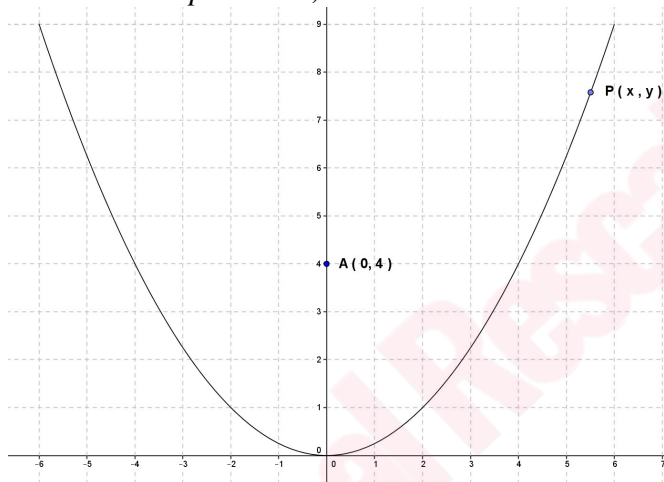
Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- La distancia entre un punto $P(x, y)$ del río y el pueblo en función de la abscisa x de P. (2 puntos)
- El punto o puntos del tramo del río situados a distancia mínima del pueblo. (4 puntos)
- El punto o puntos del tramo del río situados a distancia máxima del pueblo. (4 puntos)

Solución:

Representemos gráficamente los datos del problema,

x	$y = \frac{x^2}{4}$
-6	9
-4	4
0	0
4	4
6	9



a) ¿Distancia entre P y A?

$$d = d(P, A) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} = \left[\text{como } P \text{ es de la curva } y = \frac{x^2}{4}, \quad d = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 4\right)^2} \right]$$

$$= \sqrt{x^2 + \frac{x^4}{16} - 8 \frac{x^2}{4} + 16} = \sqrt{\frac{x^4}{16} + x^2 - 2x^2 + 16} = \sqrt{\frac{x^4}{16} - x^2 + 16}$$

Solución: $d(P, A) = \sqrt{\frac{x^4}{16} - x^2 + 16} \quad x \in [-6, 6]$

b) Debemos buscar el mínimo de la función d del apartado anterior.

$$d' = \frac{\frac{4x^3}{16} - 2x}{2\sqrt{\frac{x^4}{16} - x^2 + 16}} = \frac{\frac{x^3}{4} - 2x}{2\sqrt{\frac{x^4}{16} - x^2 + 16}}$$

Estudiemos el signo de d' . En d' el radicando del denominador lo obtuvimos como suma de dos términos al cuadrado, por tanto es positivo. Luego el denominador es positivo y el signo de d' depende del numerador.

Estudiamos el signo del numerador,

$$\frac{x^3}{4} - 2x = 0 \rightarrow x^3 - 8x = 0 \rightarrow x(x^2 - 8) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 8 = 0 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Tenemos que estudiar el signo de d' en los intervalos:

$$\begin{array}{c} | \quad \quad \quad | \quad \quad \quad | \quad \quad \quad | \quad \quad \quad | \\ -6 \qquad \qquad -2\sqrt{2} \qquad \qquad 0 \qquad \qquad 2\sqrt{2} \qquad \qquad 6 \\ \qquad \qquad \approx -2'8 \qquad \qquad \qquad \qquad \approx 2'8 \end{array}$$

Como el numerador es un polinomio de tercer grado con tres raíces reales, el signo del polinomio alterna en los cuatro intervalos; sólo necesitamos calcular el signo de d' en uno de los intervalos.

$$x=1 \rightarrow d' = \frac{\frac{1^3}{4} - 2 \cdot 1}{2\sqrt{\frac{1^4}{16} - 1^2 + 16}} = \frac{\frac{1}{4} - 2}{2\sqrt{\frac{1}{16} + 15}} = \frac{-\frac{7}{4}}{2\sqrt{\frac{1}{16} + 15}} < 0$$

Por tanto:

$$\begin{array}{c} \quad \quad \quad - \quad \quad \quad + \quad \quad \quad - \quad \quad \quad + \quad \quad \quad \\ | \quad \quad \quad | \quad \quad \quad | \quad \quad \quad | \quad \quad \quad | \\ -6 \qquad \qquad -2\sqrt{2} \qquad \qquad 0 \qquad \qquad 2\sqrt{2} \qquad \qquad 6 \\ \qquad \qquad \text{mínimo} \qquad \qquad \text{máximo} \qquad \qquad \text{mínimo} \\ \qquad \qquad \text{relativo} \qquad \qquad \text{relativo} \qquad \qquad \text{relativo} \end{array}$$

Como a la izquierda de los mínimos la función es decreciente y a la derecha creciente, uno de ellos o ambos serán los mínimos absolutos.

Calculemos el valor de d en los dos mínimos relativos obtenidos:

$$x = -2\sqrt{2} \rightarrow d = \sqrt{\frac{(-2\sqrt{2})^4}{16} - (-2\sqrt{2})^2 + 16} = \sqrt{\frac{16 \cdot 4}{16} - 4 \cdot 2 + 16} = \sqrt{4 - 8 + 16} = \sqrt{12}$$

$$x = 2\sqrt{2} \rightarrow d = \sqrt{\frac{(2\sqrt{2})^4}{16} - (2\sqrt{2})^2 + 16} = \sqrt{\frac{16 \cdot 4}{16} - 4 \cdot 2 + 16} = \sqrt{4 - 8 + 16} = \sqrt{12}$$

Como en los dos mínimos relativos la función vale lo mismo, ambos son los absolutos.

$$x = -2\sqrt{2} \rightarrow y = \frac{(-2\sqrt{2})^2}{4} = \frac{4 \cdot 2}{4} = 2$$

Obtengamos los puntos del río,

$$x = 2\sqrt{2} \rightarrow y = \frac{(2\sqrt{2})^2}{4} = \frac{4 \cdot 2}{4} = 2$$

Solución: los puntos del río situados a distancia mínima del pueblo son $(-2\sqrt{2}, 2)$ y $(2\sqrt{2}, 2)$.

c) Del estudio realizado en el apartado anterior, el máximo relativo de la distancia se alcanza en $x = 0$. Pero como estamos trabajando con una función definida en un intervalo, el máximo absoluto se puede alcanzar en los extremos del intervalo o en el máximo relativo.

Veamos,

$$x = 0 \rightarrow d = \sqrt{\frac{0^4}{16} - 0^2 + 16} = \sqrt{16} = 4$$

$$x = -6 \rightarrow d = \sqrt{\frac{(-6)^4}{16} - (-6)^2 + 16} = \sqrt{\frac{1296}{16} - 36 + 16} = \sqrt{61} = 7'8102$$

$$x = 6 \rightarrow d = \sqrt{\frac{6^4}{16} - 6^2 + 16} = \sqrt{\frac{1296}{16} - 36 + 16} = \sqrt{61} = 7'8102$$

Es decir, los puntos del río situados a distancia máxima del pueblo son $(-6, 9)$ y $(6, 9)$.