

CATALUÑA · PAU 2016 · EXTRAORDINARIA

Matemáticas II

6 ejercicios

Instrucciones del examen

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Cada cuestión vale 2 puntos. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que lleven información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

2 puntos

Sean la recta $r : (x, y, z) = (5 + k, k, -2 - 2k)$ y los puntos $P = (1, 0, -1)$ y $Q = (2, 1, 1)$.

a) 1 punto

Calcule la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto Q y es perpendicular al plano determinado por la recta r y el punto P .

b) 1 punto

Calcule el punto de la recta r que equidista de los puntos P y Q .

Ejercicio 2

2 puntos

Tres números, x , y y z , cumplen dos condiciones: que el primero es la suma de los otros dos, y que el segundo es la suma de la mitad del primero y el doble del tercero.

a) 1 punto

Compruebe que el cálculo de los tres números, x , y y z , tiene una infinidad de soluciones.

b) 1 punto

Halle una expresión general de las soluciones.

Ejercicio 3

2 puntos

Queremos hacer un envase de helado con forma de prisma regular de base cuadrada y con una capacidad de 80 cm^3 . Para elaborar la tapa y la superficie lateral, utilizaremos un material determinado que cuesta 1 €/cm^2 , pero para la base tendremos que utilizar un material que es un 50 % más caro.

a) 1 punto

Si x es la medida, en cm, del lado de la base, compruebe que la función que determina el precio del envase es $P(x) = 2,5x^2 + \frac{320}{x}$.

b) 1 punto

Calcule las medidas que debe tener el envase para que el precio sea el mínimo posible.

Ejercicio 4

2 puntos

Sea la función $f(x) = \sin(x)$.

a) 1 punto

Calcule la ecuación de las rectas tangentes a la función f en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = \pi$, respectivamente. Halle las coordenadas del punto en que se cortan las dos rectas.

b) 1 punto

Calcule el área de la región limitada por la gráfica de la función f y las rectas tangentes del apartado anterior (en caso de no haber resuelto el apartado anterior, suponga que las rectas son $y = x$ e $y = -x + \pi$, respectivamente).

Ejercicio 5

2 puntos

Responda a las cuestiones siguientes:

a) 1 punto

Halle la única matriz de la forma $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a \\ b & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ que satisface que $A^2 = A$, y compruebe que A y $A - I$ no son invertibles.

b) 1 punto

Justifique razonadamente que si A es una matriz cuadrada de orden n diferente de la matriz nula, 0 , y de la matriz identidad, I , y satisface la igualdad $A^2 = A$, entonces las matrices A y $A - I$ no son invertibles.

Ejercicio 6

2 puntos

Responda a las cuestiones siguientes:

a) 1 punto

Calcule la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por el punto de coordenadas $(0, 0, 1)$ y es perpendicular a los planos $3x + y - z = 1$ y $x + y + 2z = 5$.

b) 1 punto

Suponga que un plano π_1 es perpendicular a un segundo plano π_2 y que el plano π_2 es a la vez perpendicular a un tercer plano π_3 . Explique razonadamente si necesariamente los planos π_1 y π_3 deben ser perpendiculares entre ellos.