

Junio de 2026 · Modelo

En cada apartado explicamos qué se busca, qué regla usamos y cómo se sustituyen los datos. Para el árbol de probabilidad, las ramas se presentan en una tabla de recorridos completos: así cada probabilidad queda unida a su suceso y ninguna línea atraviesa el texto. Los resultados exactos aparecen antes de las aproximaciones.

Pregunta 1 · Probabilidad

El vuelo puede salir con tiempo bueno o malo. Primero elegimos una de esas dos situaciones y, dentro de ella, clasificamos el retraso. Las probabilidades de retraso se entienden condicionadas al tiempo indicado.

Primera rama: tiempo	Probabilidad inicial	Segunda rama: retraso	Probabilidad condicionada	Probabilidad de la ruta completa
Bueno	0.90	Puntual	0.70	$0.90 \cdot 0.70 = 0.63$
Bueno	0.90	De 1 a 3 h	$1 - 0.70 - 0.10 = 0.20$	$0.90 \cdot 0.20 = 0.18$
Bueno	0.90	Más de 3 h	0.10	$0.90 \cdot 0.10 = 0.09$
Malo	0.10	Puntual	0.40	$0.10 \cdot 0.40 = 0.04$
Malo	0.10	De 1 a 3 h	$1 - 0.40 - 0.30 = 0.30$	$0.10 \cdot 0.30 = 0.03$
Malo	0.10	Más de 3 h	0.30	$0.10 \cdot 0.30 = 0.03$

En cada ruta multiplicamos la probabilidad de la primera rama por la probabilidad condicionada de la segunda. Por ejemplo, con tiempo bueno y retraso de 1 a 3 horas:

$$P(\text{bueno y retraso de 1 a 3 h}) = P(\text{bueno})P(\text{retraso de 1 a 3 h} \mid \text{bueno}) = 0.90 \cdot 0.20 = 0.18.$$

1.1 Probabilidad de que el retraso supere 3 horas

Qué buscamos. El retraso puede superar 3 horas tanto con tiempo bueno como malo. Sumamos las probabilidades de esas dos rutas incompatibles:

$$\begin{aligned}P(R > 3) &= P(\text{bueno})P(R > 3 \mid \text{bueno}) + P(\text{malo})P(R > 3 \mid \text{malo}) \\&= 0.90 \cdot 0.10 + 0.10 \cdot 0.30 \\&= 0.09 + 0.03 \\&= \boxed{0.12}.\end{aligned}$$

Por tanto, la probabilidad de un retraso superior a 3 horas es **0.12**, es decir, el **12 %**.

1.2 Probabilidad de que hiciera mal tiempo, sabiendo que el vuelo fue puntual

Qué buscamos. Ahora sabemos que el vuelo fue puntual. Entre todos los vuelos puntuales, calculamos qué fracción tuvo tiempo malo. Usamos la definición de probabilidad condicionada:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

La ruta «tiempo malo y puntual» tiene probabilidad $0.10 \cdot 0.40 = 0.04$. La probabilidad total de puntualidad es la suma de las dos rutas puntuales:

$$P(\text{puntual}) = 0.90 \cdot 0.70 + 0.10 \cdot 0.40 = 0.63 + 0.04 = 0.67.$$

Sustituimos en la fórmula:

$$P(\text{malo} \mid \text{puntual}) = \frac{P(\text{malo y puntual})}{P(\text{puntual})} = \frac{0.04}{0.67} = \boxed{\frac{4}{67} \approx 0.0597}.$$

Así, aproximadamente un **5.97 %** de los vuelos puntuales se produjeron con mal tiempo.

1.3 Probabilidad de conectar en los 12 viajes del mes

El enunciado especifica que en esos 12 viajes siempre hace buen tiempo. En ese caso, el vuelo permite conectar si el retraso no supera 3 horas. Con buen tiempo:

$$P(\text{conectar en un viaje} \mid \text{bueno}) = 0.70 + 0.20 = 0.90.$$

$$\begin{aligned}
 P(\text{conectar en los 12}) &= \underbrace{0.90 \cdot 0.90 \cdots 0.90}_{12 \text{ viajes}} \\
 &= (0.90)^{12} \\
 &= \boxed{0.282429536481 \approx 0.2824}.
 \end{aligned}$$

La probabilidad de conectar en todos los viajes es aproximadamente el **28.24 %**. No se mezcla aquí la posibilidad de mal tiempo: la condición del apartado fija buen tiempo en cada uno de los 12 viajes.

Pregunta 2 · Álgebra

2.1 Determinante, potencias e inversa de D

Se dan

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Determinante y condición de invertibilidad. Desarrollamos por la segunda columna, que solo tiene un elemento no nulo:

$$\begin{aligned}
 \det D &= (-1)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{vmatrix} \\
 &= -1 - m^2 = -(m^2 + 1).
 \end{aligned}$$

Como $m^2 \geq 0$, se tiene $m^2 + 1 > 0$ para todo $m \in \mathbb{R}$. Por tanto $\det D \neq 0$: D es invertible para cualquier valor real del parámetro. Además, por la propiedad del determinante del producto,

$$\det(D^2) = \det(D \cdot D) = (\det D)^2 = (m^2 + 1)^2 > 0,$$

así que D^2 también es invertible para todo $m \in \mathbb{R}$.

Productos EF y $(FE)^T$. Para multiplicar una matriz de tamaño $r \times s$ por otra de tamaño $u \times v$, deben coincidir las dimensiones interiores $s = u$. Como E es 1×3 y F es 3×1 , EF existe y es 1×1 :

$$EF = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)) = \boxed{(6)}.$$

En el orden contrario, FE también existe y es una matriz 3×3 . Multiplicamos cada componente de F por la fila E :

$$FE = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 \\ (-1) \cdot 1 & (-1) \cdot 4 & (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Al transponer, filas y columnas se intercambian:

$$(FE)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & -4 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Resolver $\frac{1}{2}X + D = D^{-1}$ cuando $m = 0$. Primero sustituimos el parámetro:

$$D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \det D_0 = -1.$$

Calculamos la inversa con la fórmula $D_0^{-1} = (\det D_0)^{-1} \text{Adj}(D_0)$. La matriz de cofactores y la adjunta son:

$$C(D_0) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{Adj}(D_0) = C(D_0)^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$D_0^{-1} = -\text{Adj}(D_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Despejamos X sin cambiar el orden de las matrices:

$$\frac{1}{2}X + D_0 = D_0^{-1} \Rightarrow \frac{1}{2}X = D_0^{-1} - D_0 \Rightarrow X = 2(D_0^{-1} - D_0).$$

Sustituimos:

$$\begin{aligned} X &= 2 \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.2 Discusión del sistema con el parámetro m

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m+1 & 3 \\ 0 & 1 & m & 3 \\ m-1 & 0 & 5 & 3m \end{array} \right).$$

Usaremos el teorema de Rouché–Frobenius: el sistema es compatible si y solo si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*)$. Si ambos rangos valen **3**, es compatible determinado (SCD); si coinciden y son menores que **3**, es compatible indeterminado (SCI); si son distintos, es incompatible (SI).

1. Estudiamos el determinante para localizar los casos especiales.

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & m \\ m-1 & 5 \end{vmatrix} + (m+1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ m-1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 5 - m(m-1) - (m+1)(m-1) \\ &= 5 - m^2 + m - m^2 + 1 \\ &= 6 + m - 2m^2 \\ &= \boxed{-(m-2)(2m+3)}. \end{aligned}$$

Así, si $m \neq 2, -\frac{3}{2}$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg}(A) = 3$. Como A^* tiene tres filas, su rango tampoco puede superar **3**, y contiene a A , luego $\text{rg}(A^*) = 3$. Por Rouché–Frobenius es SCD.

2. Caso $m = 2$: el determinante se anula y hay que calcular los rangos, no decidirlos solo con $\det A = 0$. La matriz queda

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

El menor de orden **2** formado por las dos primeras filas y las dos primeras columnas vale

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

por lo que $\text{rg}(A_2) \geq 2$. Como $\det A_2 = 0$, el rango es **2**. La tercera fila es la suma de las dos primeras, y su término independiente también: $6 = 3 + 3$. Por tanto, la misma dependencia se cumple en la ampliada. Comprobamos el rango de la ampliada con menores:

$$A_2^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \end{array} \right), \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Así, $\text{rg}(A_2^*) = 2$, y el sistema es SCl.

$$\begin{aligned}y + 2z &= 3 \implies y = 3 - 2t, \\x - y + 3z &= 3 \implies x = 6 - 5t, \quad z = t.\end{aligned}$$

Luego las infinitas soluciones son

$$(x, y, z) = (6 - 5t, 3 - 2t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. Caso $m = -\frac{3}{2}$: el determinante también se anula. El menor de orden **2** de las dos primeras filas y columnas x, y vale **1**, por lo que $\text{rg}(A) = 2$. En la ampliada tomamos las columnas x, y y términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{9}{2} \end{vmatrix} = -\frac{9}{2} + \frac{15}{2} + \frac{15}{2} = \frac{21}{2} \neq 0.$$

Este menor de orden **3** prueba que $\text{rg}(A^*) = 3$. Los rangos son distintos; por Rouché–Frobenius, el sistema es SI.

4. Conclusión de la discusión.

Valor de m	$\text{rg}(A)$	$\text{rg}(A^*)$	Clasificación
$m \neq 2, -\frac{3}{2}$	3	3	SCD
$m = 2$	2	2	SCI
$m = -\frac{3}{2}$	2	3	SI

Resolver el sistema para $m = 0$. En este caso

$$\begin{cases} x - y + z = 3, \\ y = 3, \\ -x + 5z = 0. \end{cases}$$

De la segunda ecuación, $y = 3$. De la tercera, $x = 5z$. Sustituimos ambas relaciones en la primera:

$$5z - 3 + z = 3 \implies 6z = 6 \implies z = 1.$$

Entonces $x = 5$ e $y = 3$. Comprobación en las tres ecuaciones: $5 - 3 + 1 = 3$, $3 = 3$ y $-5 + 5 = 0$. Por tanto,

$$(x, y, z) = (5, 3, 1).$$

Pregunta 3 · Geometría

3.1 Posición relativa y ángulo de dos planos

Escribimos los dos planos en forma general, $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\pi_1 : 2x - a^2y - az - a + 1 = 0, \quad \pi_2 : (a - 1)x - ay - z - a = 0.$$

Sus vectores normales son

$$\vec{n}_1 = (2, -a^2, -a), \quad \vec{n}_2 = (a - 1, -a, -1).$$

Los planos son paralelos o coincidentes exactamente cuando sus normales son proporcionales; equivalentemente, su producto vectorial es cero:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (a(a^2 - 1), 2 - a, -a^2 + 2a) = (a - 2)(a + 1)(0, -1, a).$$

El vector $(0, -1, a)$ nunca es nulo, porque su segunda componente es -1 . Así que las normales son proporcionales solo si

$$(a - 2)(a + 1) = 0 \implies a = 2 \text{ o } a = -1.$$

Comprobamos si en esos casos los planos coinciden.

- Para $a = 2$:

$$\pi_1 : 2x - 4y - 2z - 1 = 0 \iff x - 2y - z = \frac{1}{2}, \quad \pi_2 : x - 2y - z = 2.$$

Tienen el mismo vector normal, pero términos independientes distintos; son paralelos distintos.

- Para $a = -1$, al sustituir se obtiene $\pi_1 : 2x - y + z + 2 = 0$, equivalente a $2x - y + z = -2$; y $\pi_2 : -2x + y - z + 1 = 0$, equivalente a $2x - y + z = 1$. Comparten normal, pero tienen términos independientes distintos, por lo que son paralelos distintos. No hay ningún valor de a para el que coincidan.

Cuando $a \neq 2, -1$, los vectores normales no son proporcionales, y los planos se cortan en una recta. Por tanto, la posición relativa queda:

$$\begin{cases} \text{paralelos distintos,} & a = 2 \text{ o } a = -1, \\ \text{secantes en una recta,} & a \neq 2, -1. \end{cases}$$

Ángulo cuando $a = 0$. Al sustituir:

$$\vec{n}_1 = (2, 0, 0), \vec{n}_2 = (-1, 0, -1).$$

El ángulo agudo θ entre los planos es el ángulo agudo entre sus normales, de modo que

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} = \frac{|2(-1)|}{2\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por tanto, $\theta = 45^\circ = \pi/4$.

Distancia desde $P = (1, 0, -1)$ al plano π_1 cuando $a = 0$. El plano es $2x + 1 = 0$. Para $Ax + By + Cz + D = 0$, la distancia del punto (x_0, y_0, z_0) es

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Sustituyendo $A = 2, B = C = 0, D = 1$ y $P = (1, 0, -1)$:

$$d(P, \pi_1) = \frac{|2(1) + 0 + 0 + 1|}{\sqrt{2^2}} = \frac{3}{2}.$$

3.2 Planos que contienen una recta

La recta se expresa en forma paramétrica, como se pide:

$$r : x = 1 + t, y = -1 - 2t, z = 1, t \in \mathbb{R}.$$

Su vector director es $\vec{v} = (1, -2, 0)$. El plano dado en el enunciado es

$$\pi : 2x + y - 3 = 0,$$

que ya está en forma general y tiene normal $\vec{n} = (2, 1, 0)$.

a) Plano perpendicular a π que contiene r . Sea $\vec{n}' = (A, B, C)$ la normal del plano buscado. Para que ese plano contenga r , su normal debe ser perpendicular al vector director:

$$\vec{n}' \cdot \vec{v} = 0 \implies A - 2B = 0.$$

Para que el nuevo plano sea perpendicular a π , las normales de ambos planos deben ser perpendiculares:

$$\vec{n}' \cdot \vec{n} = 0 \implies 2A + B = 0.$$

De $A = 2B$ y $2A + B = 0$ se obtiene $5B = 0$, luego $A = B = 0$. La normal es paralela a $(0, 0, 1)$. Como la recta pasa por $(1, -1, 1)$, el plano general es

$$z - 1 = 0.$$

b) Plano paralelo a π que contiene r . Un plano paralelo a π conserva los coeficientes de x, y, z , así que tiene forma $2x + y + c = 0$. Sustituimos el punto de la recta $(1, -1, 1)$:

$$2(1) + (-1) + c = 0 \implies c = -1.$$

La recta completa está contenida porque $2(1+t) + (-1-2t) - 1 = 0$ para todo t . Por tanto,

$$2x + y - 1 = 0.$$

Pregunta 4 · Análisis

4.1 Estudio de $f(x) = x^4 - 7x^2 + 16, g(x) = x^2$ y área encerrada

Dominios. Ambas expresiones son polinomios; los polinomios están definidos para todo número real. Por eso,

$$D_f = D_g = \mathbb{R}.$$

Extremos y crecimiento/decrecimiento de f . Derivamos:

$$f'(x) = 4x^3 - 14x = 2x(2x^2 - 7).$$

Los puntos críticos satisfacen $f'(x) = 0$:

$$2x(2x^2 - 7) = 0 \implies x = 0 \text{ o } x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}.$$

Escribimos $a = \sqrt{7/2}$. Probamos el signo de f' en cada intervalo delimitado por $-a, 0, a$:

x	$(-\infty, -a)$	$(-a, 0)$	$(0, a)$	(a, ∞)
valor de prueba	-2	-1	1	2
$\text{sgn } f'(x)$	-	+	-	+

Así, f decrece en $(-\infty, -a)$, crece en $(-a, 0)$, decrece en $(0, a)$ y crece en (a, ∞) . El cambio de signo $- \rightarrow +$ en $x = -a$ da mínimos; el cambio $+ \rightarrow -$ en $x = 0$ da un máximo local. Calculamos las ordenadas:

$$f(0) = 16, \quad f(\pm a) = a^4 - 7a^2 + 16 = \frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 16 = \frac{15}{4}.$$

Por tanto, los extremos son máximo local $(0, 16)$ y mínimos absolutos $(\pm\sqrt{7/2}, 15/4)$.

Asíntotas. Como f es un polinomio, no tiene asíntotas verticales: no hay ningún punto excluido del dominio donde la función diverja. Tampoco tiene asíntota horizontal u oblicua. En efecto, cuando $x \rightarrow \pm\infty$, el término dominante es x^4 , de modo que $f(x) \rightarrow +\infty$; por tanto, no puede acercarse a una recta $y = L$ ni a una recta $y = mx + n$. Para $g(x) = x^2$ se aplica el mismo razonamiento: es polinómica, no tiene asíntotas verticales y $g(x) \rightarrow +\infty$ en ambos extremos, así que tampoco horizontal u oblicua.

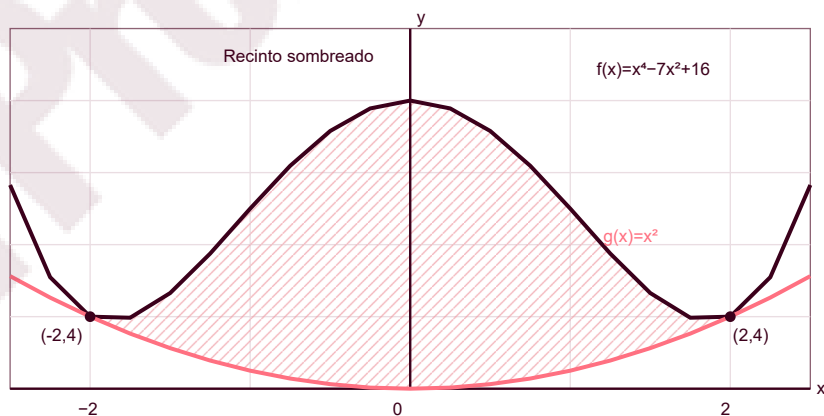
Puntos de corte entre las gráficas. Igualamos las funciones:

$$\begin{aligned} x^4 - 7x^2 + 16 &= x^2 \\ x^4 - 8x^2 + 16 &= 0 \\ (x^2 - 4)^2 &= 0 \\ x &= \pm 2. \end{aligned}$$

En ambos casos $y = x^2 = 4$, así que se cortan en $(-2, 4)$ y $(2, 4)$. Entre ellos,

$$f(x) - g(x) = (x^2 - 4)^2 \geq 0,$$

por lo que f está por encima de g , salvo que coinciden en los extremos.



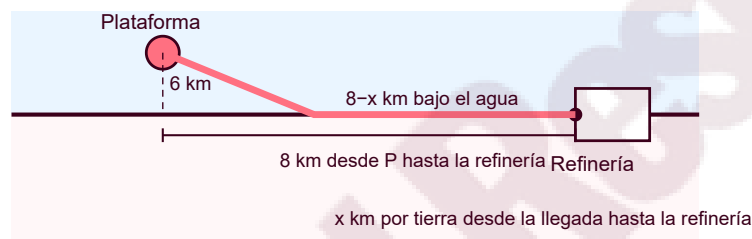
Área encerrada. El recinto está entre los puntos de corte $x = -2$ y $x = 2$; calculamos el área integrando la diferencia no negativa entre la función superior f y la inferior g .

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) dx \\
 &= \int_{-2}^2 (x^4 - 8x^2 + 16) dx \\
 &= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 16x \right]_{-2}^2 \\
 &= \left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 \right) - \left(-\frac{32}{5} + \frac{64}{3} - 32 \right) \\
 &= \boxed{\frac{512}{15} \text{ unidades}^2}.
 \end{aligned}$$

El resultado es positivo, como corresponde a un área.

4.2 Coste mínimo de una tubería

Tomamos como origen el punto P donde la tubería submarina llega a la costa, y medimos las distancias en kilómetros. La refinería está en la costa, a 8 km a la derecha de P ; la plataforma está mar adentro, a 6 km perpendicularmente a la costa. Si el tramo terrestre mide x km, entonces $0 \leq x \leq 8$ y la distancia horizontal desde la plataforma hasta el punto donde la tubería alcanza tierra es $8 - x$.



El tramo submarino es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos 6 y $8 - x$. Por Pitágoras:

$$L_{\text{sub}}(x) = \sqrt{6^2 + (8 - x)^2} = \sqrt{36 + (8 - x)^2}.$$

Si cada kilómetro submarino cuesta 1 millón de euros y cada kilómetro terrestre cuesta 0.6 millones, el coste total, en millones de euros, es

$$C(x) = \sqrt{36 + (8 - x)^2} + 0.6x, \quad 0 \leq x \leq 8.$$

Buscamos el mínimo. Derivamos el coste:

$$C'(x) = \frac{x - 8}{\sqrt{36 + (8 - x)^2}} + 0.6.$$

Igualamos a cero para localizar puntos críticos:

$$C'(x) = 0 \iff \frac{8 - x}{\sqrt{36 + (8 - x)^2}} = 0.6.$$

Como $0 \leq x \leq 8$, se tiene $8 - x \geq 0$, así que podemos elevar al cuadrado sin introducir una solución con signo contrario:

$$\begin{aligned}
 \frac{(8 - x)^2}{36 + (8 - x)^2} &= 0.36 \\
 (8 - x)^2 &= 0.36(36 + (8 - x)^2) \\
 0.64(8 - x)^2 &= 12.96 \\
 8 - x &= 4.5 \\
 x &= 3.5 \text{ km.}
 \end{aligned}$$

Comprobamos que es un mínimo con la segunda derivada: $C''(x) = \frac{36}{(36 + (8 - x)^2)^{3/2}} > 0$ para $0 \leq x \leq 8$. Por ello C es estrictamente convexa y el punto crítico es su único mínimo global. En los extremos, $C(0) = 10$ millones y $C(8) = 8.6$ millones, ambos mayores que el coste en el punto crítico.

Calculamos ese coste:

$$\begin{aligned}C(3.5) &= \sqrt{36 + (8 - 3.5)^2} + 0.6(3.5) \\&= \sqrt{36 + 4.5^2} + 2.1 \\&= \sqrt{56.25} + 2.1 \\&= 7.5 + 2.1 \\&= \boxed{9.6 \text{ millones de euros}}.\end{aligned}$$

La tubería debe llegar a tierra a **3.5 km** de **P**, en dirección a la refinería; desde ese punto quedan $8 - 3.5 = 4.5$ km de tubería terrestre. El coste mínimo total es **9.6** millones de euros.

Comprobamos el resultado separando los dos tramos:

Tramo	Longitud	Coste por kilómetro	Coste del tramo
Submarino	7.5 km	1 M€ /km	7.5 M€
Terrestre	3.5 km	0.6 M€ /km	2.1 M€
Total			9.6 M€

Las unidades también son coherentes: al multiplicar **M€ /km** por kilómetros se obtienen millones de euros.