

Opción A · Ejercicio 1

Sean a, b los catetos positivos. El área fija impone $ab/2 = 8$, luego $ab = 16$. La hipotenusa c cumple $c^2 = a^2 + b^2 \geq 2ab = 32$, con igualdad cuando $a = b$. Por tanto, la hipotenusa mínima se logra con $a = b = 4$ cm y mide $4\sqrt{2}$ cm.

Opción A · Ejercicio 2

La integral está definida para $x > 0$. Usamos el cambio sugerido $t = \sqrt{x}$, de modo que $x = t^2$ y $dx = 2t dt$:

$$\int \frac{dx}{2x(x + \sqrt{x})} = \int \frac{dt}{t^2(t + 1)}.$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2(t + 1)} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t + 1}.$$

Integrando y volviendo a x ,

$$\int \frac{dx}{2x(x + \sqrt{x})} = \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) - \frac{1}{\sqrt{x}} + C.$$

Opción A · Ejercicio 3

Como $\det A = 3$ y A es simétrica, aplicamos las propiedades del determinante:

$$\text{a) } \det(A^3) = (\det A)^3 = 27, \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{3}, \quad \det(A + A^T) = \det(2A) = 2^3 \det A = 24.$$

b) La matriz dada se forma tomando las filas de A en el orden R_1, R_3, R_2 y multiplicando la última por 2. Intercambiar dos filas cambia el signo y escalar una fila por 2 multiplica el determinante por 2:

$$\det = -2 \det A = -6.$$

c) La tercera columna es $4C_1 - C_3$, si C_i son las columnas de A . Por linealidad, el determinante resultante es $4 \det(C_1, C_2, C_1) - \det A = 0 - 3$. Así, $\det = -3$.

Opción A · Ejercicio 4

Parametrizamos

$$r = (1, 1, 0) + \lambda(1, 1, 1), \quad s = (1, 0, 1) + \mu(-2, 1, -2).$$

Para que el segmento que une un punto de cada recta sea perpendicular a ambas, su vector debe ser ortogonal a los dos vectores directores. Si R y S son esos puntos, imponemos $(S - R) \cdot (1, 1, 1) = 0$ y $(S - R) \cdot (-2, 1, -2) = 0$. Al resolver se obtiene $\lambda = -1/2$, $\mu = 1/2$, es decir, $R = (1/2, 1/2, -1/2)$ y $S = (0, 1/2, 0)$. El vector $S - R = (-1/2, 0, 1/2)$ es perpendicular a ambas rectas. La recta común perpendicular pasa por R y tiene esa dirección; una forma paramétrica es

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) + t(-1, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La distancia entre las rectas es la longitud de $S - R$:

$$d(r, s) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Opción B · Ejercicio 1

La derivabilidad en $x = 1$ exige continuidad e igualdad de derivadas laterales. Continuidad: $a - 1 = b$. Las derivadas son -1 por la izquierda y $-b/x^2 + 1/x$ por la derecha; al igualarlas en 1, $-1 = 1 - b$. De aquí $b = 2$ y $a = 3$. Para el apartado b), con estos valores la función es $3 - x$ en $[0, 1]$ y $2/x + \ln x$ en $(1, e]$. En el segundo tramo,

$$f'(x) = \frac{x-2}{x^2},$$

por lo que decrece hasta $x = 2$ y crece después. Comparando los extremos del intervalo y el punto crítico, $f(0) = 3$, $f(2) = 1 + \ln 2$ y $f(e) = 1 + 2/e$. Por tanto, el máximo absoluto es $f(0) = 3$ y el mínimo absoluto

$$f(2) = 1 + \ln 2.$$

Opción B · Ejercicio 2

En $x = 0$, $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1$, así que la tangente es $y = x + 1$. Una primitiva de $e^x \cos x$ es $\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)$; al imponer que pase por $(0, 0)$,

$$F(0) = \frac{1}{2} + C = 0 \implies C = -\frac{1}{2}.$$

La primitiva pedida es $F(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}$.

Opción B · Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} m & -2 & 1 \\ 1 & -2m & 1 \\ 1 & -2 & m \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2m & 1 & -2 \\ 1 & -2 & m & 1 \end{array} \right).$$

Su determinante es $-2(m-1)^2(m+2)$. Si $m \neq 1, -2$, el determinante no se anula y el sistema es SCD. Para $m = 1$, las tres filas de A coinciden, así que $\text{rg } A = 1$; las dos primeras filas de A^* no son proporcionales, luego $\text{rg } A^* = 2$ y el sistema es SI. Para $m = -2$, el menor de las dos primeras filas y columnas de A vale $-6 \neq 0$, de modo que $\text{rg } A = 2$. La solución que se obtiene abajo muestra que el sistema es compatible; por tanto $\text{rg } A^* = 2 < 3$ y es SCI. Resolviendo, se obtiene $x = t$, $z = t$ y $y = -t/2 - 1/2$:

$$(x, y, z) = \left(t, -\frac{t}{2} - \frac{1}{2}, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción B · Ejercicio 4

La recta r tiene punto $P = (5, 0, 6)$ y dirección $d = (-2, 1, -3)$. El normal del plano π es $n = (2, 1, -1)$ y $d \cdot n = 0$, por lo que r es paralela a π . Como P no pertenece a π (al sustituir resulta $6 \neq 0$), son paralelos distintos. b) Un normal del plano buscado debe ser perpendicular a d (para contener a r) y a n (para que el plano sea perpendicular a π). Podemos tomar $d \times n = (1, -4, -2)$. Al pasar por P :

$$x - 4y - 2z + 7 = 0.$$

c) El plano paralelo a π que contiene a r se obtiene con el normal n y el punto P . Dos vectores directores del plano son $(-2, 1, -3)$ y $(1, -4, -2)$, ambos perpendiculares a n . Por tanto, sus ecuaciones paramétricas son

$$(x, y, z) = (5, 0, 6) + s(-2, 1, -3) + t(1, -4, -2), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$