

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Los vuelos que llegan a un aeropuerto se clasifican en tres grupos: vuelos puntuales, vuelos con retrasos de hasta tres horas y vuelos con retrasos de más de tres horas. La puntualidad de los vuelos se ve afectada por las condiciones meteorológicas del momento. Si las condiciones meteorológicas son buenas, el porcentaje de los vuelos que llegan con puntualidad es del 70% mientras que el 10% llegan con más de tres horas de retraso. Si las condiciones meteorológicas son malas, el porcentaje de los vuelos que llegan con puntualidad es del 40% mientras que el 30% llegan con más de tres horas de retraso. Se calcula que el 90% de los días las condiciones meteorológicas son buenas.

- 1.1 **(0.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que un vuelo llegue con más de 3 horas de retraso?
- 1.2 **(1 punto)** Sabiendo que un vuelo ha sido puntual, ¿cuál es la probabilidad de que las condiciones meteorológicas fueran malas?
- 1.3 **(1 punto)** Un pasajero realiza un vuelo a dicho aeropuerto, desde donde debe tomar otro vuelo a su destino final. Este segundo vuelo enlaza si el primero llega con 3 horas o menos de retraso. Si realiza este viaje una vez al mes durante un año y viaja siempre en condiciones meteorológicas buenas ¿cuál es la probabilidad de que pueda enlazar con el vuelo a su destino final en todos sus viajes?

Solución:

Consideramos los siguientes sucesos:

MB = condiciones meteorológicas buenas

VP = vuelo puntual

$VR3+$ = vuelo con retraso de más de tres horas

MM = condiciones meteorológicas malas

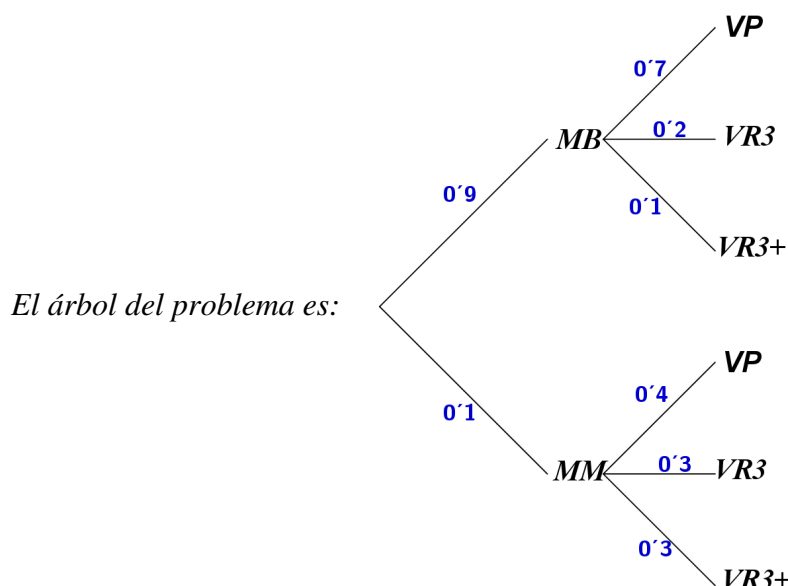
$VR3$ = vuelo con retraso de hasta tres horas

De los datos del enunciado,

“El 90% de los días las condiciones meteorológicas son buenas” $\rightarrow P(MB) = 0.9$ y $P(MM) = 0.1$

“Si las condiciones meteorológicas son buenas, el 70% de los vuelos llegan con puntualidad, el 10% llegan con más de tres horas de retraso” $\rightarrow [100 - (70 + 10) = 20]$ el 20% llega con hasta tres horas de retraso.

“Si las condiciones meteorológicas son malas, el 40% de los vuelos llega con puntualidad, el 30% llegan con más de tres horas de retraso” $\rightarrow [100 - (40 + 30) = 30]$ el 30% llega con hasta tres horas de retraso.



1.1 ¿Cuál es la probabilidad de que un vuelo llegue con más de 3 horas de retraso?

La probabilidad pedida es: $P(VR3+)$

$$P(VR3+) = 0'9 \cdot 0'1 + 0'1 \cdot 0'3 = 0'12$$

La probabilidad de que un vuelo llegue con más de 3 horas de retraso es de 0'12.

1.2 Sabiendo que un vuelo ha sido puntual, ¿cuál es la probabilidad de que las condiciones meteorológicas fueran malas?

La probabilidad pedida es: $P(MM/VP)$

$$P(MM/VP) = \frac{P(MM \cap VP)}{P(VP)} = \frac{0'1 \cdot 0'4}{0'9 \cdot 0'7 + 0'1 \cdot 0'4} = \frac{4}{67} \cong 0'0597$$

La probabilidad pedida es de 0'0597.

1.3 Un pasajero realiza un vuelo a dicho aeropuerto, desde donde debe tomar otro vuelo a su destino final. Este segundo vuelo enlaza si el primero llega con 3 horas o menos de retraso. Si realiza este viaje una vez al mes durante un año y viaja siempre en condiciones meteorológicas buenas ¿cuál es la probabilidad de que pueda enlazar con el vuelo a su destino final en todos sus viajes?

Como siempre viaja en condiciones meteorológicas buenas, la probabilidad de que en un viaje enlace con el segundo vuelo será $P(VP) + P(VR3) = 0'7 + 0'2 = 0'9$

Como viaja 12 veces, la probabilidad de que pueda enlazar con el vuelo a su destino final en todos sus viajes será $0'9^{12} = 0'282429... \cong 0'2824$.

La probabilidad pedida es de 0'2824.

2.1 Una empresa de ingeniería estructural está diseñando un sistema de soporte para un edificio que depende de un parámetro real m relacionado con la resistencia de uno de los materiales empleados. Para garantizar la estabilidad de la estructura, es necesario analizar una matriz que representa las relaciones entre fuerzas internas y externas en los puntos de unión de la estructura.

Para este análisis, se considera la siguiente matriz de rigidez:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

donde m representa el coeficiente de resistencia ajustable del material en uno de los puntos de unión.

Asimismo, se cuenta con un vector de cargas externas y un vector de desplazamientos iniciales:

$$E = (1 \quad 4 \quad 3) \quad \text{y} \quad F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La estabilidad y respuesta de la estructura dependen de las propiedades de la matriz D y de su relación con los vectores E y F . Se pide:

2.1.1 (0.5 puntos) Indicar, si existen, los valores del parámetro m para los que D tiene inversa.

2.1.2 (0.5 puntos) Si la estabilidad del sistema dependiera de que la matriz D^2 es invertible, explica razonadamente si hay algún valor de m que ponga en riesgo la estabilidad del sistema sin necesidad de resolver toda la ecuación matricial.

2.1.3 (0.5 puntos) Calcular las matrices EF y $(FE)^t$, si existen.

2.1.4 (1 punto) Resolver, para $m = 0$, la ecuación matricial con incógnita X :

$$\frac{1}{2}X + D = D^{-1}.$$

Solución:

2.1.1 ¿ $m?$ / $\exists D^{-1}$.

$$\exists D^{-1} \quad \text{si} \quad |D| \neq 0.$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 - 1$$

$$-m^2 - 1 = 0; \quad m^2 = -1; \quad m = \pm\sqrt{-1} \text{ no tiene soluciones reales}$$

Por lo tanto, la matriz D tiene inversa para cualquier valor de m .

2.1.2 Si la estabilidad del sistema dependiera de que la matriz D^2 es invertible, explica razonadamente si hay algún valor de m que ponga en riesgo la estabilidad del sistema sin necesidad de resolver toda la ecuación matricial.

$$D^2 \text{ es invertible si } |D^2| \neq 0.$$

$$\text{Ahora bien, } |D^2| = |D|^2 = (\text{calculado en el apartado anterior}) = (-m^2 - 1)^2$$

El valor de m que ponga en riesgo la estabilidad del sistema será solución de $|D^2| = 0$; $(-m^2 - 1)^2 = 0$; $-m^2 - 1 = 0$; (resuelto en el apartado anterior) No tiene soluciones.

Por lo tanto, **no existe valor de m que ponga en riesgo la estabilidad del sistema.**

2.1.3 Calcular las matrices EF y $(FE)^t$, si existen.

E es una matriz 1×3 y F es 3×1 , luego existe EF que será 1×1 .

$$EF = (1 \quad 4 \quad 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)) = (6)$$

F es una matriz 3×1 y E es 1×3 , luego existe FE que será 3×3 y también existirá $(FE)^t$.

$$FE = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \quad 4 \quad 3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow (FE)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & -4 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución: $EF = (6)$ y $(FE)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & -4 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

2.1.4 Resolver, para $m = 0$, $\frac{1}{2}X + D = D^{-1}$.

Para $m = 0$, en el apartado 2.1.1, hemos obtenido que existe D^{-1} .

Despejemos X :

$$\frac{1}{2}X + D = D^{-1}; \quad \frac{1}{2}X = D^{-1} - D; \quad X = 2(D^{-1} - D)$$

Cálculo de D^{-1} :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |D| = (-m^2 - 1)_{m=0} = -1$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Finalmente } D^{-1} = \frac{1}{|D|} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } X = 2 \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right] = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Tu Profe al Rescate

2.2 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad y \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3m \end{pmatrix}.$$

2.2.1 **(1 punto)** Discutir el sistema de ecuaciones $Ax = b$ en función del parámetro real m .

2.2.2 **(0.75 puntos)** Calcular, si existe, la solución para $m = 0$.

2.2.3 **(0.75 puntos)** Hallar la solución en el caso en que el sistema tenga infinitas soluciones.

Solución:

2.2.1 Discutir el sistema de ecuaciones $Ax = b$ en función del parámetro real m .

La matriz ampliada del sistema será: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m+1 & 3 \\ 0 & 1 & m & 3 \\ m-1 & 0 & 5 & 3m \end{array} \right)$

A es 3×3 luego el máximo rango de A es 3. A' es 3×4 , el máximo rango de A' es 3. Empezamos estudiando el rango de A .

Rango de A en función de m .

En A el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 2$

Estudiemos el menor de orden 3,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 - m(m-1) - (m+1)(m-1) = 5 - m^2 + m - m^2 + 1 = -2m^2 + m + 6$$

$$-2m^2 + m + 6 = 0; \quad m = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 6}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-1 \pm 7}{-4} = \begin{cases} m_1 = \frac{-1+7}{-4} = -\frac{3}{2} \\ m_2 = \frac{-1-7}{-4} = 2 \end{cases}$$

Por lo tanto,

Si $m \neq -\frac{3}{2}$ y $m \neq 2$, $\text{ran}(A) = 3$ y como el máximo rango de A' es 3 $\rightarrow \text{ran}(A') = 3$, por lo tanto $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ$ de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado

Si $m = -\frac{3}{2}$, $|A| = 0$ (antes hemos obtenido que $\text{ran}(A) \geq 2$), luego $\text{ran}(A) = 2$.

Para este valor de m , $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \frac{-3}{2}+1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} & 3 \\ \frac{-3}{2}-1 & 0 & 5 & 3\frac{-3}{2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \frac{-1}{2} & 3 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} & 3 \\ \frac{-5}{2} & 0 & 5 & \frac{-9}{2} \end{array} \right)$

En A' , a partir del menor no nulo de orden 2 de A formamos el menor de orden 3 añadiéndole la 3ª fila y 4ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & -9 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{-9}{2} + \frac{15}{2} + \frac{15}{2} = \frac{21}{2} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Por lo tanto, $\text{ran}(A) = 2 \neq 3 = \text{ran}(A') \rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $m = 2$, $|A| = 0$ (antes hemos obtenido que $\text{ran}(A) \geq 2$), luego $\text{ran}(A) = 2$.

Para este valor de m , $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

En A' , a partir del menor no nulo de orden 2 de A formamos el menor de orden 3 añadiéndole la 3ª fila y 4ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 3 - 3 = 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 2$$

Por lo tanto, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^\circ$ de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Solución:

Si $m \neq \frac{-3}{2}$ y $m \neq 2$, sistema compatible determinado.

Si $m = \frac{-3}{2}$, sistema incompatible

Si $m = 2$, sistema compatible determinado.

2.2.2 Calcular, si existe, la solución para $m = 0$.

Si $m = 0$ ($m \neq \frac{-3}{2}$ y $m \neq 2$) $\rightarrow$ el sistema es compatible y determinado, luego el sistema tiene solución.

Para $m = 0$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ y $|A| = (-2m^2 + m + 6)_{m=0} = 6$

El sistema a resolver es:
$$\begin{cases} x - y + 3z = 3 \\ y = 3 \\ -x + 5z = 0 \end{cases}$$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{6} = \frac{15 + 15}{6} = 5$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{3 + 3}{6} = 1$$

Si $m = 0$, la solución es:
$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

2.2.3 Hallar la solución en el caso en que el sistema tenga infinitas soluciones.

El sistema tiene infinitas soluciones cuando es compatible indeterminado, es decir, cuando $m = 2$

El sistema a resolver es el correspondiente a las ecuaciones e incógnitas del menor de orden 2 no nulo calculado en el apartado 2.2.1). Es decir, el formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y como incógnitas principales x e y .

$$\begin{cases} x - y = 3 - 3z \\ y = 3 - 2z \end{cases}$$

La segunda ecuación nos da la solución de y , sustituyendo este valor en la 1ª obtendremos x :

$$x - (3 - 2z) = 3 - 2z \rightarrow x = 3 - 2z + 3 - 2z = 6 - 4z$$

La solución es:
$$\begin{cases} x = 6 - 4\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Tu Profe al Rescate

3.1 Dados los planos $\pi_1: 2x - a^2y - az = a - 1$ y $\pi_2: (a - 1)x - ay - z = a$, se pide:

3.1.1 (1.5 puntos) Analizar en función de a la posición relativa de los dos planos.

3.1.2 (0.5 puntos) Calcular, para $a = 0$, el ángulo entre los dos planos.

3.1.3 (0.5 puntos) Calcular, para $a = 0$, la distancia del punto $P = (1, 0, -1)$ y el plano π_1 .

Solución:

3.1.1 Analizar en función de a la posición relativa de los dos planos.

π_1 coincidente con π_2 .

Debe cumplirse que $\frac{2}{a-1} = \frac{-a^2}{-a} = \frac{-a}{-1} = \frac{a-1}{a}$; $\frac{2}{a-1} = \frac{a^2}{a} = \frac{a}{1} = \frac{a-1}{a}$ esto da lugar a tres ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{2}{a-1} = \frac{a^2}{a} \\ \frac{2}{a-1} = \frac{a}{1} \\ \frac{2}{a-1} = \frac{a-1}{a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a = a^3 - a^2 \\ 2 = a^2 - a \\ 2a = (a-1)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^3 - a^2 - 2a = 0 \\ a^2 - a - 2 = 0 \\ 2a = a^2 - 2a + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(a^2 - a - 2) = 0 \\ a^2 - a - 2 = 0 \\ a^2 - 4a + 1 = 0 \end{cases}$$

Resolvamos cada una de las ecuaciones,

$$a(a^2 - a - 2) = 0 \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a^2 - a - 2 = 0; \quad a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} a_2 = \frac{1+3}{2} = 2 \\ a_3 = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$a^2 - a - 2 = 0; \text{ ya resuelta: } a_2 = 2 \text{ y } a_3 = -1$$

$$a^2 - 4a + 1 = 0; \quad a = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} = \begin{cases} a_4 = 2 + \sqrt{3} \\ a_5 = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

No existe valor de a para el que se cumplan las tres ecuaciones simultáneamente. Luego **no existe valor de a para el que los dos planos sean coincidentes.**

π_1 y π_2 paralelos no coincidentes.

Debe cumplirse que $\frac{2}{a-1} = \frac{-a^2}{-a} = \frac{-a}{-1} \neq \frac{a-1}{a}$; $\frac{2}{a-1} = \frac{a^2}{a} = \frac{a}{1} \neq \frac{a-1}{a}$ esto da lugar a dos ecuaciones y una desigualdad:

$$\begin{cases} \frac{2}{a-1} = \frac{a^2}{a} & \text{Las dos ecuaciones las hemos resuelto antes.} \\ \frac{2}{a-1} = \frac{a}{1} & 1^{\text{a}} \text{ ecuación: } a = 0, -1 \text{ y } 2. \quad 2^{\text{a}} \text{ ecuación: } a = -1 \text{ y } 2. \\ \frac{2}{a-1} \neq \frac{a-1}{a} & \text{Las dos ecuaciones se cumplen para } a = -1 \text{ y } 2. \text{ Veamos si para estos valores de } a \text{ se cumple la desigualdad.} \end{cases}$$

Para $a = -1$, $\frac{2}{-1-1} \neq \frac{-1-1}{-1}$; $\frac{2}{-2} \neq \frac{-2}{-1}$; $-1 \neq 2$ Sí

Para $a = 2$, $\frac{2}{2-1} \neq \frac{2-1}{2}$; $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{2}$; $1 \neq \frac{1}{2}$ Sí

Para $a = -1$ y 2 π_1 y π_2 son planos paralelos no coincidentes.

π_1 y π_2 se cortan.

La posición relativa de dos planos puede ser coincidentes, paralelos no coincidentes o que se corten. Como π_1 y π_2 no son coincidentes y son paralelos no coincidentes para $a = -1$ y 2 entonces **se cortan** para $a \neq -1$ y 2 .

Solución: para $a = -1$ y 2 π_1 y π_2 son planos paralelos no coincidentes y para $a \neq -1$ y 2 se cortan.

3.1.2 Si $a = 0$, ¿ángulo entre π_1 y π_2 ?

Para $a = 0$, $\pi_1: 2x = -1$ y $\pi_2: -x - z = 0$.

El ángulo entre los dos planos es igual al ángulo entre sus vectores normales.

$$\vec{n}_{\pi_1} = (2, 0, 0) \quad \text{y} \quad \vec{n}_{\pi_2} = (-1, -1, 0)$$

$$\cos \left(\hat{\vec{n}_{\pi_1}, \vec{n}_{\pi_2}} \right) = \frac{|(2, 0, 0) \cdot (-1, -1, 0)|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2} \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{|-2|}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \left(\hat{\vec{n}_{\pi_1}, \vec{n}_{\pi_2}} \right) = 45^\circ$$

Luego, el ángulo entre π_1 y π_2 es de 45° .

3.1.3 Si $a = 0$ y $P = (1, 0, -1)$, ¿ $d(P, \pi_1)$?

Para $a = 0$, $\pi_1: 2x = -1$, $\pi_1: 2x + 1 = 0$.

$$d(P, \pi_1) = \frac{|2 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{3}{2}$$

Luego, la distancia del punto $P = (1, 0, -1)$ y el plano π_1 es $3/2$.

3.2 Dado el plano $\pi: 2x + y - 3 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - 2\alpha \\ z = 1 \end{cases}$, se pide:

3.2.1 (1.25 puntos) Obtener la ecuación del plano perpendicular a π y que contiene a r .

3.2.2 (1.25 puntos) Calcular, si existe, un plano paralelo a π y que contenga a r .

Solución:

3.2.1 Obtener la ecuación del plano, σ , perpendicular a π y que contiene a r .

Del plano σ necesitamos conocer un punto y dos vectores directores.

$$\text{Como } r \subset \sigma \rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, -2, 0) = \vec{u}_\sigma \\ \vec{P}_r = (1, -1, 1) = \vec{P}_\sigma \end{cases}$$

$$\text{Como } \sigma \perp \pi \rightarrow \vec{n}_\pi = (2, 1, 0) = \vec{w}_\sigma$$

Los vectores $\vec{u}_\sigma$ y $\vec{w}_\sigma$ no son paralelos ya que sus coordenadas no son proporcionales $\left(\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{1}\right)$, por lo que sirven como vectores directores del plano σ .

$$\text{La ecuación de } \sigma \text{ será: } \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad (z-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad (z-1)5 = 0; \quad z-1 = 0$$

Solución: la ecuación del plano pedido es $z - 1 = 0$.

3.2.2 Calcular, si existe, un plano paralelo a π y que contenga a r .

¿Existe plano ψ ? / $\psi // \pi$ y $r \subset \psi$.

$$\text{Como } \psi // \pi \rightarrow \psi: 2x + y + D = 0.$$

Como $r \subset \psi \rightarrow$ los puntos de la recta r verifican la ecuación del plano ψ :

$$2(1 + \alpha) + (-1 - 2\alpha) + D = 0; \quad 2 + 2\alpha - 1 - 2\alpha + D = 0; \quad 1 + D = 0; \quad D = -1$$

Solución: la ecuación del plano pedido es $2x + y - 1 = 0$.

4.1 Dadas las funciones $f(x) = x^4 - 7x^2 + 16$ y $g(x) = x^2$, obtener:

4.1.1 (1.25 puntos) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos, si existen. Dibuja $f(x)$.

4.1.2 (1.5 puntos) Los puntos de corte entre $f(x)$ y $g(x)$ y el área comprendida entre ambas curvas.

Solución:

4.1.1 Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos.

La función $y = f(x)$ es un polinomio por lo que $\text{Dom } y = \mathcal{R}$.

$$y = x^4 - 7x^2 + 16$$

$$y' = 4x^3 - 14x; \quad y'' = 12x^2 - 14$$

Monotonía.

$$y' = 0; \quad 4x^3 - 14x = 0; \quad x(4x^2 - 14) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ 4x^2 - 14 = 0; \quad 4x^2 = 14; \quad x^2 = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}; \quad x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}} \cong \pm 1'87 \end{array} \right.$$

Debemos estudiar el signo de y' en los siguientes intervalos:

x	y'
$-\infty$	
$-\sqrt{\frac{7}{2}}$	$4(-2)^3 - 14(-2) = -4$
0	$4(-1)^3 - 14(-1) = 10$
$\sqrt{\frac{7}{2}}$	$4 \cdot 1^3 - 14 \cdot 1 = -10$
$+\infty$	$4 \cdot 2^3 - 14 \cdot 2 = 4$

Luego:

$-\infty$	$+$	0	$+$	$+\infty$
$-\sqrt{\frac{7}{2}}$				$\sqrt{\frac{7}{2}}$
$-1'87$				$1'87$

Por tanto, $y = f(x)$ es

decreciente en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{2}}\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ y

creciente en $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{7}{2}}, +\infty\right)$.

Del estudio de la monotonía se deduce que la función tiene un máximo relativo en $x = 0$ y mínimos relativos en $x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$. Comprobémoslo a partir de y'' .

x	$y'' = 12x^2 - 14$	$y = x^4 - 7x^2 + 16$
$-\sqrt{\frac{7}{2}}$	$12\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2 - 14 = 28 > 0$ mínimo	$\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^4 - 7\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2 + 16 = \frac{15}{4}; \quad \left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{15}{4}\right)$
0	$12 \cdot 0^2 - 14 = -14 < 0$ máximo	$0^4 - 7 \cdot 0^2 + 16 = 16; \quad (0, 16)$
$\sqrt{\frac{7}{2}}$	$12\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2 - 14 = 28 > 0$ mínimo	$\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^4 - 7\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2 + 16 = \frac{15}{4}; \quad \left(\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{15}{4}\right)$

Solución: $y = f(x)$ es decreciente en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{2}}\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ y creciente en $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{7}{2}}, +\infty\right)$.

Tiene mínimo relativo en $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{15}{4}\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{15}{4}\right)$ y máximo relativo en $(0, 16)$.

Dibujar $f(x)$.

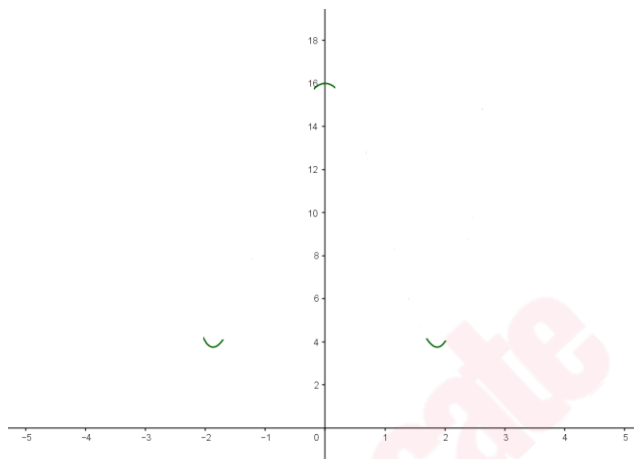
De los cálculos anteriores conocemos los intervalos de crecimiento y decrecimiento, el máximo (que es punto de corte con el eje OY) y mínimos de $f(x)$.

Mínimos: $(-1'87, 3'75)$ y $(1'87, 3'75)$. Máximo: $(0, 16)$

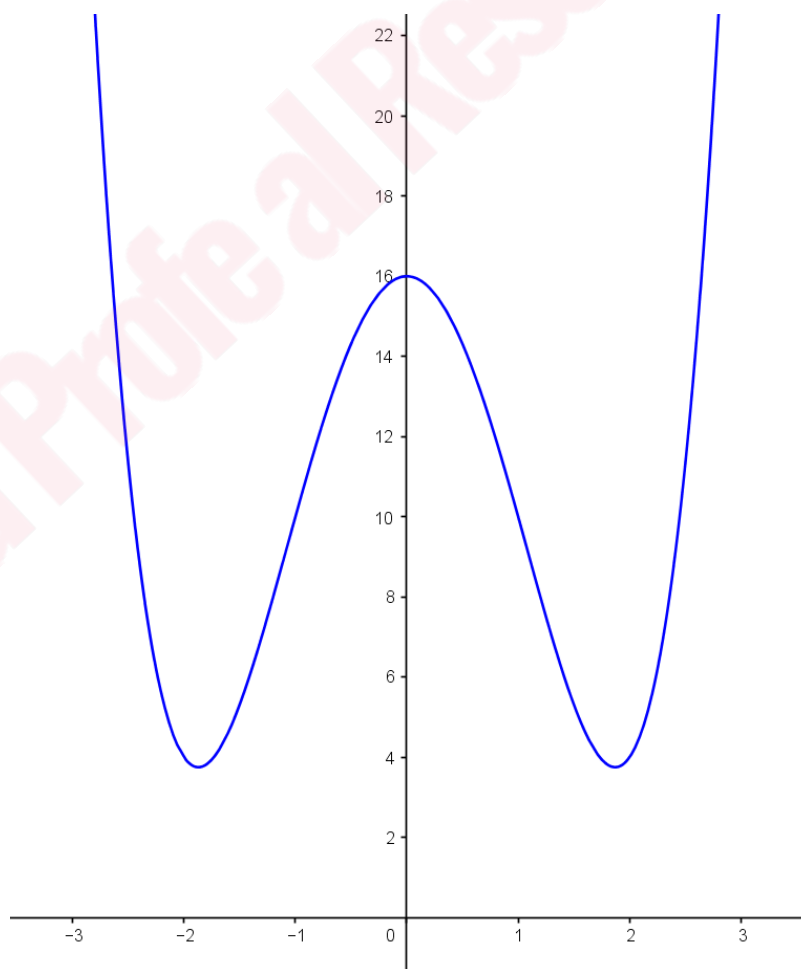
Calculemos, si existen, los puntos de corte con el eje OX.

$$x^4 - 7x^2 + 16 = 0; \quad x^2 = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{-15}}{2} \quad \text{no tiene soluciones}$$

Representando los datos conocidos:



Y la gráfica de $f(x)$ será:



4.1.2 Los puntos de corte entre $f(x)$ y $g(x)$ y el área comprendida entre ambas curvas.

$$f(x) = x^4 - 7x^2 + 16 \quad \text{y} \quad g(x) = x^2$$

Los puntos de corte entre las dos curvas lo obtenemos a partir de la ecuación:

$x^4 - 7x^2 + 16 = x^2$; $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$; ecuación bicuadrada, hacemos el cambio $z = x^2$ y $z^2 = x^4$.

$$z^2 - 8z + 16 = 0; \quad z = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 0}{2} = 4$$

Deshaciendo el cambio: $x^2 = 4$; $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

Para $x = -2$, $g(-2) = (-2)^2 = 4 \rightarrow (-2, 4)$

Para $x = 2$, $g(2) = (2)^2 = 4 \rightarrow (2, 4)$

Los puntos de corte entre $f(x)$ y $g(x)$ son $(-2, 4)$ y $(2, 4)$.

Como las dos curvas sólo tienen dos puntos de corte entre ellas, el área de la superficie encerrada entre ellas la obtenemos como sigue:

$$A = \left| \int_{-2}^2 [(x^4 - 7x^2 + 16) - (x^2)] dx \right| = \left| \int_{-2}^2 (x^4 - 7x^2 + 16) dx \right|$$

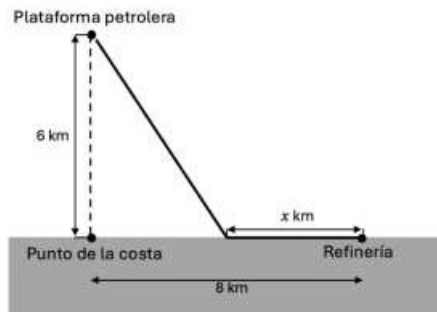
Calculemos $\int_{-2}^2 (x^4 - 7x^2 + 16) dx$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 (x^4 - 7x^2 + 16) dx &= \left[\frac{x^5}{5} - 8 \frac{x^3}{3} + 16x \right]_{-2}^2 = \left(\frac{2^5}{5} - 8 \frac{2^3}{3} + 16 \cdot 2 \right) - \left(\frac{(-2)^5}{5} - 8 \frac{(-2)^3}{3} + 16 \cdot (-2) \right) = \\ &= \frac{256}{5} - \frac{256}{3} + \frac{320}{3} = \frac{512}{15} \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } A = \left| \frac{512}{15} \right| = \frac{512}{15} \cong 34'1313$$

El área pedida mide $\frac{512}{15}$ u.a.

4.2 Una costa marítima se extiende en línea recta hacia la derecha desde un punto P de la costa. A 8 km de P hay una refinería situada en la costa. Además, hay una plataforma petrolífera en el mar que está situada a 6 km de distancia de P en la recta perpendicular a la costa desde el punto P. Se construirá un oleoducto desde la plataforma hasta la refinería. El coste de construir el oleoducto bajo el agua es de 1 millón de euros por kilómetro y el de construirlo sobre tierra, de 0,6 millones de euros por kilómetro.



4.2.1 (0.5 puntos) Encontrar la función del coste de construcción del oleoducto dependiendo de la distancia, x , entre el primer punto donde el oleoducto toca la costa y la refinería.

4.2.2 (1.5 puntos) Encontrar el valor de x para que el coste de construcción del oleoducto sea mínimo.

4.2.3 (0.5 puntos) Calcular dicho coste.

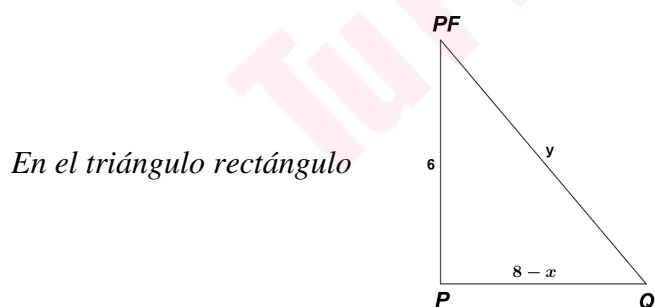
Solución:

4.2.1 Encontrar la función del coste de construcción del oleoducto dependiendo de la distancia, x , entre el primer punto donde el oleoducto toca la costa y la refinería.

Del gráfico se deduce que la distancia entre el punto de la costa y el primer punto donde el oleoducto toca la costa es $8 - x$.

Siendo y la distancia entre la plataforma petrolífera y el primer punto donde el oleoducto toca la costa.

Coste = $1000000 y + 600000 x$, como debemos expresar el coste en función de x busquemos la relación entre x e y .



$$y^2 = 6^2 + (8 - x)^2$$

$$y^2 = 36 + (8 - x)^2$$

$$y = \sqrt{36 + (8 - x)^2}$$

Por tanto, $C(x) = 1000000 \sqrt{36 + (8 - x)^2} + 600000 x$, por su definición $x \in [0, 8]$

Solución: $C(x) = 1000000 \sqrt{36 + (8 - x)^2} + 600000 x$, $x \in [0, 8]$; x en km y $C(x)$ en euros.

4.2.2 ¿ x ? / $C(x)$ sea mínimo.

$$C'(x) = 1000000 \frac{2(8-x)(-1)}{2\sqrt{36+(8-x)^2}} + 600000 = \frac{-1000000(8-x)}{\sqrt{36+(8-x)^2}} + 600000$$

$$C'(x) = 0; \quad \frac{-1000000(8-x)}{\sqrt{36+(8-x)^2}} + 600000 = 0; \quad -1000000(8-x) + 600000\sqrt{36+(8-x)^2} = 0$$

$$600000\sqrt{36+(8-x)^2} = 1000000(8-x); \quad 3\sqrt{36+(8-x)^2} = 5(8-x);$$

$$\left[3\sqrt{36+(8-x)^2}\right]^2 = [5(8-x)]^2; \quad 9(36+(8-x)^2) = 25(8-x)^2; \quad 324 + 9(8-x)^2 = 25(8-x)^2;$$

$$324 = 25(8-x)^2 - 9(8-x)^2; \quad 324 = 16(8-x)^2; \quad (8-x)^2 = \frac{324}{16}; \quad (8-x)^2 = \frac{81}{4}; \quad 8-x = \pm\sqrt{\frac{81}{4}};$$

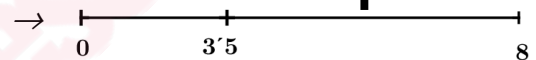
$$8-x = \pm\frac{9}{2} \begin{cases} 8-x = \frac{9}{2}; & x = 8 - \frac{9}{2} = \frac{7}{2} = 3.5 \in [0,8] \\ 8-x = -\frac{9}{2}; & x = 8 + \frac{9}{2} = \frac{25}{2} = 12.5 \notin [0,8] \end{cases}$$

Debemos estudiar el signo de $C'(x)$ en los siguientes intervalos:



$$x = 3, \quad C'(3) = \frac{-1000000(8-3)}{\sqrt{36+(8-3)^2}} + 600000 = -40184'399... < 0$$

$$x = 4, \quad C'(4) = \frac{-1000000(8-4)}{\sqrt{36+(8-4)^2}} + 600000 = 45299'803... > 0$$



Por lo tanto, en $x = 3.5$ hay un mínimo relativo que es el absoluto ya que $C(x)$ es decreciente a su izquierda y creciente a su derecha.

El coste de construcción del oleoducto será mínimo para $x = 3.5$ km.

4.2.3 Calcular dicho coste.

$$\text{Para } x = 3.5, \quad C(3.5) = 1000000\sqrt{36+(8-3.5)^2} + 600000 \cdot 3.5 = 9600000$$

El coste de construcción mínimo es de 9 600 000 €.