

PROBLEMA A.1.

Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} \alpha x + \alpha^3 y + z = 1 \\ \alpha x + \alpha y + z = 1 \\ \alpha^3 x + \alpha y + z = 1 \end{cases}$$
 donde α es un parámetro

real, se pide:

- Deducir, razonadamente, para qué valores de α es compatible determinado. (4 puntos)
- Deducir, razonadamente, para qué valores de α es compatible indeterminado. (3 puntos)
- Resolver el sistema en todos los casos en que es compatible indeterminado. (3 puntos)

Solución:

Estudiamos el sistema. La matriz ampliada del sistema es:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \alpha^3 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha^3 & \alpha & 1 & 1 \end{array} \right)$$

La matriz de coeficientes, A, es 3x3 por lo que su máximo rango es 3.

La matriz ampliada, A', es 3x4 por lo que su máximo rango, también, será 3.

Empezamos estudiando el rango de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^3 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ \alpha^3 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^6 - \alpha^4 - \alpha^2 - \alpha^4 = \alpha^6 - 2\alpha^4 + \alpha^2 = \alpha^2(\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1)$$

$$\alpha^2(\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 0 \rightarrow \alpha = 0 \\ \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 = 0 \rightarrow \alpha^2 = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow \alpha = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

A partir de este estudio iremos obteniendo las respuestas a los apartados.

a)

Para $\alpha \neq -1, 0, 1$ se cumple $|A| \neq 0$ luego $\text{rang}(A) = 3$ y como el máximo rango de A' es 3, $\text{rang}(A') = 3$

Luego, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 3 = n^\circ$ de incógnitas $\rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Por lo tanto el sistema es compatible determinado para $\alpha \neq -1, 0, 1$.

b) *Estudiamos el sistema para los valores de $\alpha = -1, 0, 1$*

Sabemos que para estos valores de α $|A| = 0$ luego $\text{rang}(A) \leq 2$.

$\alpha = -1$

La matriz ampliada es:
$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Como las tres filas son iguales y sus elementos no nulos $\rightarrow \text{rang}(A') = 1 = \text{rang}(A) < 3 = n^\circ$ de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

$$\alpha = 0$$

La matriz ampliada es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$

Las tres filas son iguales, a efectos de cálculo de rango nos podemos quedar con una sola fila.

Como $A = (0 \ 0 \ 1) \rightarrow \text{rang}(A) = 1$ (hay un elemento no nulo en la matriz).

Análogamente, $A' = (0 \ 0 \ 1 \ 1) \rightarrow \text{rang}(A') = 1$

Luego, $\text{rang}(A') = 1 = \text{rang}(A) < 3 = n^\circ$ de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

$$\alpha = 1$$

La matriz ampliada es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$

Como las tres filas son iguales y sus elementos no nulos $\rightarrow \text{rang}(A') = 1 = \text{rang}(A) < 3 = n^\circ$ de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

La respuesta del apartado b) es: el sistema es compatible indeterminado para $\alpha = -1, 0, 1$.

c) Resolvamos el sistema en los casos en que es compatible indeterminado.

$$\alpha = -1, \text{rang}(A') = 1 = \text{rang}(A)$$

El menor no nulo que proporciona el rango de A es, por ejemplo, $|a_{13}| = |1| \neq 0$.

La ecuación que tenemos para resolver será: $-x - y + z = 1 \rightarrow z = 1 + x + y$

Para $\alpha = -1$, la solución del sistema es:
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 1 + \lambda + \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\alpha = 0, \text{rang}(A') = 1 = \text{rang}(A)$$

El menor no nulo que proporciona el rango de A es, por ejemplo, $|a_{13}| = |1| \neq 0$.

La ecuación que tenemos para resolver será: $0x + 0y + z = 1 \rightarrow z = 1$

Para $\alpha = 0$, la solución del sistema es:
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 1 \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\alpha = 1, \text{rang}(A') = 1 = \text{rang}(A)$$

El menor no nulo que proporciona el rango de A es, por ejemplo, $|a_{11}| = |1| \neq 0$.

La ecuación que tenemos para resolver será: $x + y + z = 1 \rightarrow x = 1 - y - z$

Para $\alpha = 1$, la solución del sistema es:
$$\begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

PROBLEMA A.2. Se pide obtener razonadamente:

- La ecuación del plano π que pasa por los puntos $O = (0, 0, 0)$, $A = (6, -3, 0)$ y $B = (3, 0, 1)$. (3 puntos)
- La ecuación de la recta r que pasa por el punto $P = (8, 7, -2)$ y es perpendicular al plano π . (3 puntos)
- El punto Q del plano π cuya distancia al punto P es menor que la distancia de cualquier otro punto del plano π al punto P . (4 puntos)

Solución:

- a) La ecuación del plano π que pasa por los puntos $O = (0, 0, 0)$, $A = (6, -3, 0)$ y $B = (3, 0, 1)$.
A partir de los tres puntos del plano calculamos los dos vectores directores del plano:

$$\vec{OA} = (6, -3, 0) - (0, 0, 0) = (6, -3, 0)$$

$$\vec{OB} = (3, 0, 1) - (0, 0, 0) = (3, 0, 1)$$

y tomando como punto del plano, por ejemplo, $O = (0, 0, 0)$, podemos calcular la ecuación del plano π

$$\text{Ecuación paramétrica} \quad \begin{cases} x = 0 + 6\lambda + 3\mu \\ x = 0 - 3\lambda + 0\mu \\ x = 0 + 0\lambda + \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 6\lambda + 3\mu \\ x = -3\lambda \\ x = \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ecuación implícita} \quad \begin{vmatrix} 6 & 3 & x-0 \\ -3 & 0 & y-0 \\ 0 & 1 & z-0 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 6 & 3 & x \\ -3 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad -3x - 6y + 9z = 0,$$

simplificando entre -3 , $x + 2y - 3z = 0$

- b) Ecuación de la recta r que pasa por el punto $P = (8, 7, -2)$ y es perpendicular al plano π : $x + 2y - 3z = 0$

$$\text{Como } r \perp \pi \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_\pi \rightarrow \vec{v}_r = (1, 2, -3)$$

$$\text{De la recta } r \text{ tenemos} \begin{cases} \text{Punto } P = (8, 7, -2) \\ \text{vector director } \vec{v}_r = (1, 2, -3) \end{cases}$$

Por lo que:

$$\text{Ecuación paramétrica:} \quad \begin{cases} x = 8 + \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = -2 - 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ecuación continua:} \quad \frac{x-8}{1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z+2}{-3}$$

- c) ¿ $Q \in \pi$? / $d(Q, P) \leq d(P_\pi, P) \quad \forall P_\pi \in \pi$

Como $r \perp \pi$, el punto Q será el de corte entre el plano π y la recta r .

$$\begin{cases} r \\ \pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 8 + \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = -2 - 3\lambda \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$8 + \lambda + 2(7 + 2\lambda) - 3(-2 - 3\lambda) = 0$$

$$8 + \lambda + 14 + 4\lambda + 6 + 9\lambda = 0$$

$$14\lambda + 28 = 0$$

$$14\lambda = -28$$

$$\lambda = -2$$

Sustituyendo este valor de λ en la ecuación de la recta

$$x = 8 - 2 = 6$$

$$y = 7 + 2(-2) = 3$$

$$z = -2 - 3(-2) = -2 + 6 = 4$$

Por lo tanto $Q(6, 3, 4)$

Tu Profe al Rescate

PROBLEMA A.3. Dadas las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 2x^2 - x$, se pide:

- Obtener razonadamente los puntos de intersección A y B de las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$. (3 puntos)
- Demostrar que $f(x) \geq g(x)$ cuando $x \geq 0$. (3 puntos)
- Calcular razonadamente el área de la superficie limitada por las dos curvas entre los puntos A y B. (4 puntos)

Solución:

a) Puntos de intersección entre $y = f(x)$ e $y = g(x)$

Debemos resolver la siguiente ecuación:

$$x^3 = 2x^2 - x$$

$$x^3 - 2x^2 + x = 0$$

$$x(x^2 - 2x + 1) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0 \rightarrow x-1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{Para } x = 0, f(0) = 0^3 = 0 \rightarrow (0, 0)$$

$$\text{Para } x = 1, f(1) = 1^3 = 1 \rightarrow (1, 1)$$

Los puntos de intersección buscados son: $A = (0, 0)$ y $B = (1, 1)$

b) $f(x) \geq g(x)$

Veamos cuando se cumple esta desigualdad.

$$x^3 \geq 2x^2 - x$$

$$x^3 - 2x^2 + x \geq 0$$

Según hemos obtenido en el apartado anterior: $x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$

Como $(x-1)^2$ es siempre positivo, por estar elevado al cuadrado, el signo del primer miembro de la desigualdad depende del de x .

Luego para $x \geq 0$ se cumple que $x^3 - 2x^2 + x \geq 0$ y por lo tanto $f(x) \geq g(x)$. c.q.d.

c) Representemos gráficamente las dos curvas.

Por lo resuelto en el apartado a) conocemos los puntos de corte entre ambas, $A = (0, 0)$ y $B = (1, 1)$.

$$y = 2x^2 - x$$

Es una parábola. Buscamos sus puntos de corte con los ejes coordenados y su vértice.

$$x = 0 \rightarrow y = 2 \cdot 0^2 - 0 = 0 \rightarrow (0, 0)$$

$$y = 0 \rightarrow 2x^2 - x = 0 \rightarrow x(2x - 1) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ 2x - 1 = 0 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (0, 0) \\ \left(\frac{1}{2}, 0\right) \end{array}$$

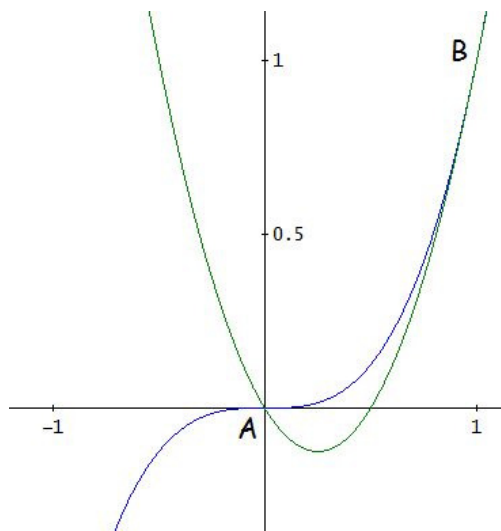
$$\text{Vértice } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} \rightarrow y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{2}{8} = -\frac{1}{8} \quad \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)$$

$$y = x^3$$

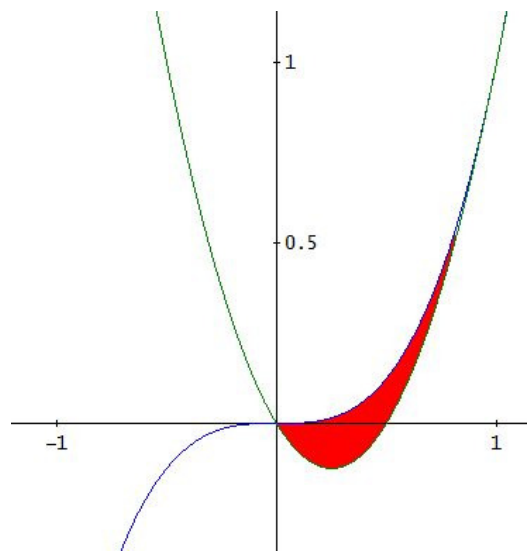
La representamos a partir de una tabla de valores,

x	y = x ³
-1	-1
0	0
1	1

La representación gráfica será:



El área a calcular es:



El cálculo del área pedida será mediante la siguiente integral definida:

$$\int_0^1 (x^3 - (2x^2 - x)) dx = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 0 = \frac{3-8+6}{12} = \frac{1}{12}$$

El área de la superficie limitada por las dos curvas mide $\frac{1}{12}$ u.a.

PROBLEMA B.1. Dadas las matrices

$$A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B(y) = \begin{pmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

- Obtener razonadamente el valor de x para que el determinante de la matriz $A(x)$ sea 6. (4 puntos)
- Calcular razonadamente el determinante de la matriz $2A(x)$. (2 puntos)
- Demostrar que la matriz $B(y)$ no tiene matriz inversa para ningún valor real de y . (4 puntos)

Solución:

a) ¿x? / $|A(x)| = 6$

$$|A(x)| = \begin{vmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = F_2 - F_1 = \begin{vmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -2(x+2) - 4 - 6 + 4(x+2) = 2(x+2) - 10 = 2x + 4 - 10 = 2x - 6$$

$$2x - 6 = 6 \rightarrow 2x = 12 \rightarrow x = 6$$

Por lo tanto, para que $|A(x)| = 6$ debe ser $x = 6$.

b) $|2A(x)| = \{ \text{como } A(x) \text{ es } 3 \times 3 \} = 2^3 |A(x)| = 8(2x - 6) = 16x - 48$

c) $|B(y)| = \begin{vmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ F_2 - F_1 & & \\ F_3 - F_1 & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \{ \text{como } F_3 = 2F_2 \} = 0$

Es decir que, independientemente del valor de y , $|B(y)| = 0$, luego la matriz $B(y)$ no tiene inversa para ningún valor real de y .

PROBLEMA B.2. Dadas las dos rectas r y s de ecuaciones

$$r: \frac{x-4}{3} = \frac{y-4}{2} = z-4 \quad \text{y} \quad s: x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

se pide calcular razonadamente:

- Las coordenadas del punto P de intersección de las rectas r y s . (3 puntos)
- El ángulo que forman las rectas r y s . (3 puntos)
- Ecuación implícita $Ax + By + Cz + D = 0$ del plano π que contiene a las rectas r y s . (4 puntos)

Solución:

a) Punto P de intersección de las rectas r y s .

Escribamos las ecuaciones paramétricas de las rectas r y s .

$$r: \begin{cases} x = 4 + 3\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = 2\mu \\ z = 3\mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Buscamos el punto de corte entre r y s resolviendo el sistema que se obtiene al igualar las ecuaciones de las rectas,

$$\begin{cases} 4 + 3\lambda = \mu \\ 4 + 2\lambda = 2\mu \\ 4 + \lambda = 3\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3\lambda - \mu = -4 \\ 2\lambda - 2\mu = -4 \\ \lambda - 3\mu = -4 \end{cases} \rightarrow A' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & -3 & -4 \end{array} \right)$$

Estudiemos el rango de A' ,

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{matrix} f_2 - f_1 \\ f_3 - f_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \{ f_3 = 2 \times f_2 \} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 2 = -4 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A') = 2$$

Estudiemos el rango de A ,

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

Como $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 2 = n^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Resolvemos el sistema usando las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 no nulo.

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} 3\lambda - \mu = -4 & -2 \times 1^a \\ 2\lambda - 2\mu = -4 & 2^a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6\lambda + 2\mu = 8 \\ 2\lambda - 2\mu = -4 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones: $-4\lambda = 4 \rightarrow \lambda = -1$

No es necesario que busquemos el valor de la otra incógnita.

Obtengamos las coordenadas del punto P (sustituyendo el valor de λ en la recta r),

$$\begin{aligned} x &= 4 + 3(-1) = 1 \\ y &= 4 + 2(-1) = 2 \\ z &= 4 + (-1) = 3 \end{aligned}$$

luego $P = (1, 2, 3)$

b)

$$(\hat{r}, \hat{s}) = \left(\begin{array}{c} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \end{array} \right)$$

$$\text{Como } \vec{v}_r = (3, 2, 1) \text{ y } \vec{v}_s = (1, 2, 3)$$

$$\cos \left(\begin{array}{c} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \end{array} \right) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{\left| \vec{v}_r \right| \cdot \left| \vec{v}_s \right|} = \frac{(3, 2, 1) \cdot (1, 2, 3)}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{3 + 4 + 3}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$\text{luego } \left(\begin{array}{c} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \end{array} \right) = 0.7752 \text{ rds} = 44'4153''$$

$$\text{Finalmente } (\hat{r}, \hat{s}) = 0.7752 \text{ rds} = 44'4153''$$

c) Plano π que contiene a las rectas r y s .

Como las rectas r y s están en el plano π , entonces P (punto de corte entre r y s) es de π y los vectores directores de las rectas l serán del plano. La ecuación del plano podemos obtenerla como sigue:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x-1 \\ 2 & 2 & y-2 \\ 1 & 3 & z-3 \end{vmatrix} = 0$$

desarrollando por la tercera columna,

$$(x-1) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (z-3) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)4 - (y-2)8 + (z-3)4 = 0, \text{ simplificando entre 4,}$$

$$(x-1) - (y-2)2 + (z-3) = 0$$

$$x - 1 - 2y + 4 + z - 3 = 0$$

$$x - 2y + z = 0$$

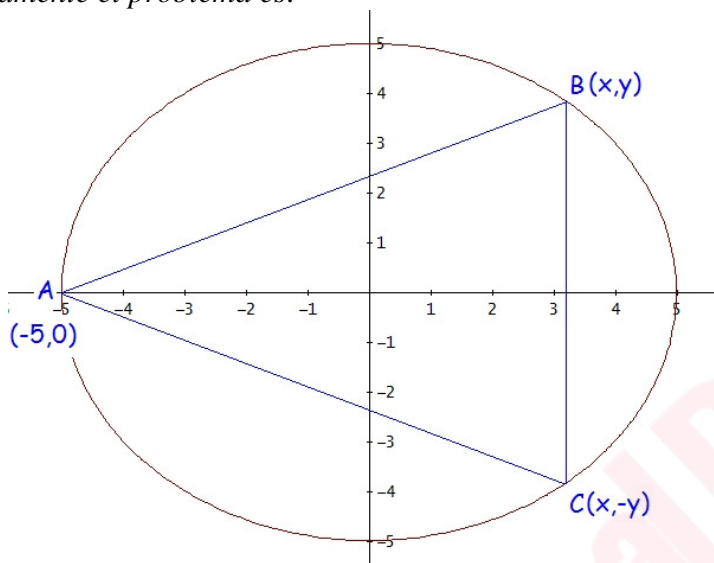
$$\text{Solución: } \pi \equiv x - 2y + z = 0$$

PROBLEMA B.3. Dos elementos de un escudo son una circunferencia y un triángulo. La circunferencia tiene centro $(0,0)$ y radio 5. Uno de los vértices del triángulo es el punto $A=(-5,0)$. Los otros dos vértices del triángulo son los puntos de la circunferencia $B=(x,y)$ y $C=(x,-y)$. Se pide obtener razonadamente:

- El área del triángulo en función de x . (3 puntos)
- Los vértices B y C para los que es máxima el área del triángulo. (5 puntos)
- El valor máximo del área del triángulo. (2 puntos)

Solución:

Gráficamente el problema es:



a) Área del triángulo

Por construcción es un triángulo isósceles, por lo que podemos calcular su área fácilmente.

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

siendo $b = 2y$, $h = 5 + x$ (siendo $-5 < x < 5$; si $x = -5$ sería un punto y si $x = 5$ una recta)

Debemos encontrar el valor de y en función de x . B y C son puntos de la circunferencia, obtengamos su ecuación.

Es una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 5 $\rightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 = 5^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 25$

Despejemos y :

$$y^2 = 25 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

$$\text{Luego } b = 2y = 2\sqrt{25 - x^2}$$

$$\text{El área del triángulo será } A(x) = \frac{2\sqrt{25 - x^2} (5 + x)}{2} = (5 + x) \sqrt{25 - x^2}$$

siendo $-5 < x < 5$.

b) Máximo de $A(x)$

$$A(x) = (5 + x) \sqrt{25 - x^2} \quad y \quad \text{Dom } A = [-5, 5]$$

$$A'(x) = \sqrt{25 - x^2} + (5 + x) \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = \sqrt{25 - x^2} - \frac{x(5 + x)}{\sqrt{25 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0$$

$$\sqrt{25-x^2} - \frac{x(5+x)}{\sqrt{25-x^2}} = 0$$

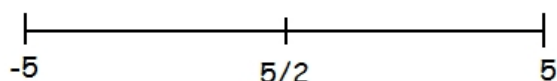
$$25 - x^2 - 5x - x^2 = 0$$

$$25 - 2x^2 - 5x = 0$$

$$2x^2 + 5x - 25 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-25)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 200}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 200}}{4} =$$

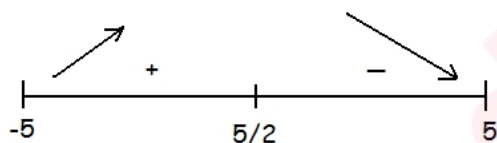
$$= \frac{-5 \pm \sqrt{225}}{4} = \frac{-5 \pm 15}{4} = \begin{cases} \frac{-5 + 15}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \\ \frac{-5 - 15}{4} = \frac{-20}{4} = -5 \end{cases}$$

Estudiemos el signo de A' para determinar máximos y mínimos. Considerando el dominio de $A(x)$ y las soluciones de $A'(x) = 0$, hay que estudiar A' en los siguientes intervalos,



x	A'
0	$\sqrt{25-0^2} - \frac{0(5+0)}{\sqrt{25-0^2}} = 5 > 0$
4	$\sqrt{25-4^2} - \frac{4(5+4)}{\sqrt{25-4^2}} = \sqrt{9} - \frac{36}{\sqrt{9}} = 3 - \frac{36}{3} = 3 - 12 = -9 < 0$

Es decir que,



Luego la función $A(x)$ alcanza su máximo relativo en $x = 5/2$, como además $A(x)$ es creciente a la izquierda de $5/2$ y decreciente a la derecha, el máximo relativo es absoluto.

Por lo que el área del triángulo es máxima para $x = 5/2$.

Obtenemos los vértices B y C . Como estos vértices son simétricos respecto del eje OY , sólo obtendremos el valor positivo de y .

$$\text{Para } x = \frac{5}{2} \rightarrow y = \sqrt{25 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{25 - \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{100 - 25}{4}} = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Luego el área del triángulo es máxima cuando los vértices B y C son:

$$B = \left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right) \text{ y } C = \left(\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$$

c) El valor máximo del área del triángulo, según lo calculado en el apartado anterior, será:

$$A\left(\frac{5}{2}\right) = \left(5 + \frac{5}{2}\right) \sqrt{25 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{15}{2} \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{4} \approx 32'48 \text{ u.a.}$$