

Resolución completa de los ocho ejercicios con desarrollo.

Ejercicio 1

Como $x > 0$, $f(x) = \ln(x + 1/x)$. Derivando,

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)}.$$

El denominador es positivo: la función decrece en $(0, 1)$ y crece en $(1, \infty)$. En $x = 1$ alcanza un mínimo relativo y absoluto $f(1) = \ln 2$. Además, $f(x) \rightarrow +\infty$ en ambos extremos del dominio, así que no hay máximo absoluto.

Ejercicio 2

Para que el cociente tenga límite finito, el término de primer orden del numerador debe anularse; como $e^x - 1 = x + O(x^2)$, esto exige $b = 0$. Usamos los desarrollos

$$\ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \sin^2 x = x^2 + o(x^2).$$

Con $b = 0$, el límite vale $(-a/2 + 1/2)$. Igualándolo a 5 resulta $a = -9$. Por tanto, $a = -9, b = 0$.

Ejercicio 3

Por el teorema fundamental del cálculo, $f'(x) = \cos x \sin^2 x$. En $x = \pi/4$,

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\pi/4} \cos t \sin^2 t \, dt = \frac{\sin^3(\pi/4)}{3} = \frac{\sqrt{2}}{24}, \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Las rectas tangente y normal son, respectivamente,

$$y - \frac{\sqrt{2}}{24} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad y - \frac{\sqrt{2}}{24} = -2\sqrt{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Ejercicio 4

Sea $t = \sqrt{1+e^x}$; entonces $e^x = t^2 - 1$ y $dx = 2t \, dt / (t^2 - 1)$. Así,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+4e^x}} = \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C.$$

Volviendo a x ,

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{1+e^x} - 1}{\sqrt{1+e^x} + 1} \right) + C.$$

Ejercicio 5

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+a & -a \end{pmatrix}$ y

$$\det A = -(a-1)(a-2).$$

Si $a \neq 1, 2$, el rango es 3 y el sistema es compatible determinado. Para $a = 1$, los rangos de la matriz y la ampliada son ambos $2 < 3$, así que es compatible indeterminado. Para $a = 2$, los rangos son 2 y 3, por lo que es incompatible. Con $a = 0$, el determinante no se anula y la solución única es $(x, y, z) = (-1, 1, 0)$.

Ejercicio 6

Sea n la cifra de las centenas, d la de las decenas y u la de las unidades. El número y su versión con centenas y unidades intercambiadas son

$$N = 100n + 10d + u, \quad N' = 100u + 10d + n.$$

Las condiciones dan $n + d + u = 9$, $99(n - u) = 198$ y $101(n + u) + 20d = 828$. De la segunda, $n - u = 2$; usando también la suma se obtiene $n + u = 8$ y $d = 1$. Así, $n = 5$, $u = 3$ y el número es $\boxed{513}$.

Ejercicio 7

El vector $\overrightarrow{PQ} = (2, -2, 0)$ es normal al plano mediador, y el punto medio es $M = (2, -1, 1)$. Por tanto,

$$(x - 2) - (y + 1) = 0 \implies \boxed{x - y - 3 = 0}.$$

La recta paralela a r tiene director $u = (-1, 3, 1)$ y el plano debe contener además $\overrightarrow{PQ}$. Un normal es $\overrightarrow{PQ} \times u = (-1, -1, 2)$. Al pasar por $P = (1, 0, 1)$, el plano es

$$\boxed{x + y - 2z + 1 = 0}.$$

Ejercicio 8

Con $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, -1, -1)$ y $\overrightarrow{AC} = C - A = (0, -2, 0)$,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2, 0, 0),$$

por lo que el área del triángulo es 1. Para que D complete el paralelogramo con vértices consecutivos A, B, C, D , usamos $D = A + C - B$:

$$\boxed{D = (1, 0, 3)}.$$