

Modelo 5 de 2007

Soluciones desarrolladas · PAU Andalucía

Opción A · Ejercicio 1

Como $e^x > 0$, el signo de $f'(x) = (x-2)e^x$ es el de $x-2$. La función decrece hasta $x=2$ y crece después; tiene un mínimo relativo en $(2, -e^2)$. La segunda derivada es $f''(x) = (x-1)e^x$, que cambia de signo en $x=1$. El punto de inflexión es $(1, -2e)$ y la pendiente allí vale $f'(1) = -e$. Por tanto, la tangente es

$$y + 2e = -e(x - 1), \quad \boxed{y = -ex - e}.$$

Opción A · Ejercicio 2

La continuidad en 0 se cumple para cualquier α , pues ambas ramas valen 1. Para que haya derivabilidad, igualamos las derivadas laterales: $\alpha = -1$. Así,

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 0, \\ e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

La integral se calcula por tramos, pues cambia la expresión de la función:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 (1-x) dx + \int_0^1 e^{-x} dx = \frac{3}{2} + 1 - e^{-1} = \boxed{\frac{5}{2} - e^{-1}}.$$

Opción A · Ejercicio 3

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+m & m^2 \end{pmatrix}, \quad 2A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+2m & 2m^2 - m \end{pmatrix}.$$

Al igualar con I , la entrada inferior izquierda da $m = -\frac{1}{2}$, valor que también hace $2m^2 - m = 1$. Además, de $2A^2 - A = I$ se deduce $A(2A - I) = I$, así que $A^{-1} = 2A - I$. Para ese parámetro,

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}.$$

b) Si $2M^2 - M = I$, entonces $M(2M - I) = I$. Al ser matrices cuadradas, $2M - I$ es la inversa de M :

$$\boxed{M^{-1} = 2M - I}.$$

Opción A · Ejercicio 4

a) Una dirección paralela a ambos planos debe ser perpendicular a sus normales $(1, 1, 1)$ y $(-1, 1, 1)$. Su producto vectorial es proporcional a $(0, 1, -1)$. La recta que pasa por el origen es

$$\boxed{(x, y, z) = t(0, 1, -1), \quad t \in \mathbb{R}}.$$

b) La recta es paralela a π_1 , así que la distancia es la de cualquier punto suyo al plano. Usando el origen:

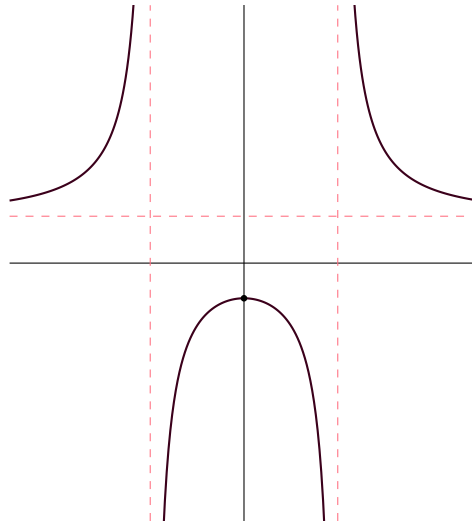
$$d(r, \pi_1) = \frac{|0 + 0 + 0 - 3\sqrt{3}|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \boxed{3}.$$

Opción B · Ejercicio 1

El dominio excluye $x = \pm 2$. La derivada es

$$f'(x) = \frac{-14x}{(x^2 - 4)^2}.$$

Luego crece en $(-\infty, -2)$ y $(-2, 0)$, y decrece en $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$. Hay un máximo relativo en $x = 0$, de valor $f(0) = -3/4$. En $x = \pm 2$ el numerador vale 7 y el denominador tiende a cero: son asíntotas verticales. El cociente de los términos de mayor grado da $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$, por lo que $y = 1$ es horizontal en ambos extremos. La función es par y no corta el eje X . El esbozo representa sus tres ramas, las asíntotas verticales $x = \pm 2$, la horizontal $y = 1$ y el máximo local:



Opción B · Ejercicio 2

a) Descomponemos el numerador como $3x + 4 = \frac{3}{2}(2x) + 4$:

$$\int \frac{3x + 4}{x^2 + 1} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 1) + 4 \arctan x + C.$$

b) Integramos por partes con $u = x$ y $dv = \cos(2x)dx$, de modo que $du = dx$ y $v = \frac{1}{2} \sin(2x)$:

$$\int_0^{\pi/4} x \cos(2x) dx = \left[\frac{x}{2} \sin(2x) \right]_0^{\pi/4} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sin(2x) dx = \boxed{\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}}.$$

Opción B · Ejercicio 3

al sumar las dos primeras ecuaciones se obtiene $(1+m)(x+y) = 2m$. La tercera da $m(x+y) = 1$. Para $m \neq 0$, al sustituir resulta $1+m = 2m^2$, es decir, $(2m+1)(m-1) = 0$. Si $m = 1$, las tres ecuaciones se reducen a $x+y = 1$, así que hay infinitas soluciones $(t, 1-t)$. Si $m = -\frac{1}{2}$, las dos primeras forman un sistema regular y dan $x = y = -1$. Para $m = 0$, la tercera ecuación sería $0 = 1$, imposible. En consecuencia, el sistema es compatible solo para

$$m = 1 : (x, y) = (t, 1-t); \quad m = -\frac{1}{2} : (x, y) = (-1, -1).$$

Opción B · Ejercicio 4

La recta es intersección de dos planos, con normales $n_1 = (3, -1, -1)$ y $n_2 = (1, 1, -1)$; su dirección es $d = n_1 \times n_2 = (1, 1, 2)$. Un punto de ella es $R = (-1, -5, 0)$. La distancia de P a la recta se calcula mediante

$$d(P, r) = \frac{|(P-R) \times d|}{|d|} = \frac{\sqrt{(-3)^2 + 3^2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{3}.$$

El reflejo de P está a la misma distancia al otro lado de la recta, de modo que la distancia entre ambos puntos es $2d(P, r) = \boxed{2\sqrt{3}}$.