

El examen ofrece dos opciones; se desarrollan ambas para repasar todos sus ejercicios.

Opción A - Ejercicio 1

La función $f(x) = e^x(x - 2)$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, así que su dominio es $\mathbb{R}$. Estudiaremos sus derivadas para obtener el crecimiento, los extremos y los puntos de inflexión.

$$f'(x) = e^x(x - 2) + e^x = e^x(x - 1), \quad f''(x) = e^x(x - 1) + e^x = xe^x.$$

Como $e^x > 0$, el signo de $f'(x)$ viene dado por $x - 1$: la función decrece en $(-\infty, 1)$ y crece en $(1, +\infty)$. Por tanto, en $x = 1$ pasa de decrecer a crecer y tiene un mínimo relativo:

$$f(1) = e(1 - 2) = -e, \quad \boxed{\text{mínimo en } (1, -e)}.$$

El signo de f'' es el de x . Cambia de negativo a positivo en $x = 0$, por lo que allí hay un punto de inflexión:

$$f(0) = -2, \quad \boxed{(0, -2)}.$$

Para las asíntotas, no hay verticales porque el dominio es todo $\mathbb{R}$. Además,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x(x - 2) = 0,$$

así que $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$. Cuando $x \rightarrow +\infty$, la función crece exponencialmente y no tiene asíntota horizontal; tampoco puede tener oblicua, pues $f(x)/x \rightarrow +\infty$ y la pendiente de una oblicua debe ser finita. La función no tiene asíntotas verticales ni oblicuas.

Opción A - Ejercicio 2

El teorema fundamental del cálculo permite expresar las integrales mediante los valores de una primitiva en los extremos. Como $F' = f$ y $F(2) = 1$, $F(3) = 2$,

$$\int_2^3 f(x) dx = F(3) - F(2) = 2 - 1 = 1.$$

Por linealidad de la integral y porque el intervalo tiene longitud $3 - 2 = 1$,

$$\int_2^3 (5f(x) - 7) dx = 5 \int_2^3 f(x) dx - 7 \int_2^3 1 dx = 5 \cdot 1 - 7(3 - 2) = \boxed{-2}.$$

Para la última integral usamos que $F' = f$ y la regla de la cadena: $(F^3/3)' = F^2 F' = F^2 f$.

$$\int_2^3 F(x)^2 f(x) dx = \left[\frac{F(x)^3}{3} \right]_2^3 = \frac{F(3)^3 - F(2)^3}{3} = \frac{8 - 1}{3} = \boxed{\frac{7}{3}}.$$

Opción A - Ejercicio 3

El determinante permite decidir si A es invertible. Desarrollando por la primera fila,

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = 2k - 1.$$

Por tanto, A tiene inversa exactamente cuando $2k - 1 \neq 0$, es decir, para $k \neq \frac{1}{2}$.

Para $k = 0$, la ecuación dada es $(X + I)A = A^T$. Como A es invertible, multiplicamos por A^{-1} a la derecha y despejamos:

$$X + I = A^T A^{-1}, \quad X = A^T A^{-1} - I.$$

En este caso,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos primero el producto y después restamos la identidad:

$$A^T A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = A^T A^{-1} - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Opción A - Ejercicio 4

Como A, B, C son vértices consecutivos, los lados adyacentes determinan el área del paralelogramo. Restando las coordenadas obtenemos

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2 - 2, 1 - (-1), 0 - 0) = (-4, 2, 0),$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (0 - (-2), 1 - 1, 2 - 0) = (2, 0, 2).$$

El módulo del producto vectorial de estos lados da el área:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = (4, 8, -4), \quad \mathcal{A} = \sqrt{4^2 + 8^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{6}.$$

En un paralelogramo, las diagonales tienen el mismo punto medio; de ahí $D = A + C - B = (4, -1, 2)$ y el centro es el punto medio de AC :

$$M = \frac{A + C}{2} = (1, 0, 1).$$

Un vector normal al plano del paralelogramo es $(1, 2, -1)$, proporcional al producto vectorial anterior. La recta perpendicular al plano que pasa por M tiene ese vector como director. En forma paramétrica:

$$\ell: \quad x = 1 + t, \quad y = 2t, \quad z = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Usamos los desarrollos alrededor de $x = 0$ hasta el término de segundo grado:

$$\sin x = x + O(x^3), \quad e^x = 1 + x + O(x^2).$$

Así, el numerador queda

$$a \sin x - xe^x = (a-1)x - x^2 + O(x^3).$$

Al dividir entre x^2 , aparece el término $(a-1)/x$. Para que el límite sea finito debe anularse, por lo que $a = 1$. Sustituyendo ese valor, el cociente tiende al coeficiente del término de grado dos:

$$\boxed{a = 1}, \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - xe^x}{x^2} = -1}.$$

Opción B - Ejercicio 2

Descomponemos en fracciones simples para hallar una primitiva:

$$\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1},$$

por lo que, en cualquier intervalo que no cruce $x = \pm 1$,

$$\boxed{\int \frac{2}{x^2 - 1} dx = \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + C}.$$

Para $x \geq 2$ el integrando es positivo; por ello el área entre la curva, el eje x y las rectas $x = 2$, $x = k$ ($k > 2$) coincide con la integral definida. Igualamos dicha área a $\ln 2$:

$$\begin{aligned} \int_2^k \frac{2}{x^2 - 1} dx &= \left[\ln \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right) \right]_2^k \\ &= \ln \left(\frac{3(k - 1)}{k + 1} \right) = \ln 2. \end{aligned}$$

Como el logaritmo es inyectivo, $3(k - 1)/(k + 1) = 2$, de donde $3k - 3 = 2k + 2$ y $\boxed{k = 5}$.

Opción B - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & \lambda - 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_\lambda^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda + 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2\lambda + 3 \\ 3 & \lambda - 1 & 1 & \lambda \end{array} \right).$$

El determinante de A_λ es $-2(\lambda - 1)$. Si $\lambda \neq 1$, el rango de A_λ es 3, igual al número de incógnitas. También el de la ampliada es 3, así que por Rouché-Frobenius el sistema es compatible determinado.

Si $\lambda = 1$, la tercera ecuación es la combinación 3 veces la primera menos la segunda, también en los términos independientes. Como las dos primeras ecuaciones son independientes, $\text{rg}(A_1) = \text{rg}(A_1^*) = 2 < 3$. El sistema es compatible indeterminado. Tomando $z = t$ y resolviendo las dos primeras ecuaciones,

$$\boxed{(x, y, z) = \left(\frac{1 - t}{3}, \frac{5 - 2t}{3}, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para que el vector $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ sea solución, la primera ecuación exige $0 = \lambda + 1$, luego $\lambda = -1$. Con este valor, las otras dos ecuaciones también se cumplen, así que

$$\boxed{\lambda = -1}.$$

Opción B - Ejercicio 4

Escribimos primero la intersección de los planos en forma paramétrica. De $x + z = 3$ se obtiene $z = 3 - x$; al sustituirlo en $x + y - z = 6$, resulta $y = 9 - 2x$. Tomando $x = t$:

$$r: \quad x = t, \quad y = 9 - 2t, \quad z = 3 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La recta s ya está dada en forma continua. Igualando sus razones a un parámetro u , la expresamos en forma paramétrica:

$$s: \quad x = 1 - u, \quad y = -1 + 6u, \quad z = 2u, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Para hallar el punto de corte igualamos las coordenadas. De $t = 1 - u$ y $3 - t = 2u$ se obtiene $u = 2$, $t = -1$, y ambas rectas pasan por $P = (-1, 11, 4)$.

Un plano que contenga a ambas rectas debe contener sus vectores directores $\vec{v}_r = (1, -2, -1)$ y $\vec{v}_s = (-1, 6, 2)$. Su producto vectorial da un vector normal:

$$\vec{n} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = (2, -1, 4).$$

Usando el punto de intersección P , la ecuación general del plano es

$$2(x + 1) - (y - 11) + 4(z - 4) = 0 \quad \implies \quad \boxed{2x - y + 4z - 3 = 0}.$$