



**PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA
UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA, CURSO 2020-2021**

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
 - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
 - d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.**
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Calcula a y b sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(1 - \cos(x)) + b \sin(x) - 2(e^x - 1)}{x^2} = 7$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Halla $a > 0$ y $b > 0$ sabiendo que la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{bx^2}{1+ax^4}$ tiene en el punto $(1, 2)$ un punto crítico.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 1 + \int_0^x te^t dt.$$

Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f y sus puntos de inflexión (abscisas donde se obtiene y valores que se alcanzan)).

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ (para $x \neq -1, x \neq 1$). Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(2, 4)$



**PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA
UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA CURSO 2020-2021**

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- a) Comprueba que $A^2 = -A^{-1}$. **(1.25 puntos)**
 b) Dadas las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

calcula la matriz X que verifica $A^4 X + B = AC$. **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Una empresa de mensajería opera en tres rutas distintas A, B y C. Semanalmente hace un total de 70 viajes, y el número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C.

- a) Si sabemos que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70, ¿podemos deducir el número de viajes por cada ruta? Razona la respuesta. **(1.25 puntos)**
 b) Si el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5, ¿cuántos viajes hace por cada ruta? **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

La recta perpendicular desde el punto $A(1,1,0)$ a un cierto plano π corta a éste en el punto

$$B = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

- a) Calcula la ecuación del plano π . **(1.5 puntos)**
 b) Halla la distancia del punto A a su simétrico respecto a π . **(1 punto)**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

- a) Estudia la posición relativa de r y s . **(1.25 puntos)**
 b) Halla la recta que corta perpendicularmente a r y a s . **(1.25 puntos)**

SOLUCIONES**BLOQUE A****EJERCICIO 1 (2.5 puntos)**

Calcula a y b sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(1 - \cos(x)) + b \operatorname{sen}(x) - 2(e^x - 1)}{x^2} = 7$.

Calculamos el límite y luego lo igualamos a 7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(1 - \cos(x)) + b \operatorname{sen}(x) - 2(e^x - 1)}{x^2} = \frac{a(1 - \cos(0)) + b \operatorname{sen}(0) - 2(e^0 - 1)}{0^2} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(0 + \operatorname{sen}(x)) + b \cos(x) - 2(e^x - 0)}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \operatorname{sen}(x) + b \cos(x) - 2e^x}{2x} = \frac{a \cdot \operatorname{sen}(0) + b \cos(0) - 2e^0}{2 \cdot 0} = \frac{b - 2}{0} = \dots$$

Como el límite debe valer 7 no puede ser $b - 2$ distinto de cero pues entonces valdría ∞ . Entonces $b = 2$ y seguimos calculando el límite.

$$\dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \operatorname{sen}(x) + 2 \cos(x) - 2e^x}{2x} = \frac{a \cdot \operatorname{sen}(0) + 2 \cos(0) - 2e^0}{2 \cdot 0} = \frac{2 - 2}{0} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \cos(x) - 2 \operatorname{sen}(x) - 2e^x}{2} =$$

$$= \frac{a \cdot \cos(0) - 2 \operatorname{sen}(0) - 2e^0}{2} = \frac{a - 2}{2}$$

Como el límite debe dar 7 entonces $\frac{a - 2}{2} = 7 \Rightarrow a - 2 = 14 \Rightarrow \boxed{a = 16}$

Los valores buscados son $a = 16$ y $b = 2$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Halla $a > 0$ y $b > 0$ sabiendo que la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{bx^2}{1+ax^4}$ tiene en el punto $(1, 2)$ un punto crítico.

Un punto crítico en el punto $(1, 2)$ significa dos cosas: una que la función pasa por dicho punto, es decir, $f(1) = 2$ y otra que la derivada se anula en $x = 1$, es decir $f'(1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{bx^2}{1+ax^4} \\ f(1) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 = \frac{b \cdot 1^2}{1+a \cdot 1^4} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow 2(1+a) = b \Rightarrow \boxed{b = 2 + 2a}$$

$$f(x) = \frac{bx^2}{1+ax^4} \Rightarrow f'(x) = \frac{2bx(1+ax^4) - 4ax^3(bx^2)}{(1+ax^4)^2} = \frac{2bx + 2abx^5 - 4abx^5}{(1+ax^4)^2} = \frac{2bx - 2abx^5}{(1+ax^4)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{2bx - 2abx^5}{(1+ax^4)^2} \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2b - 2ab}{(1+a)^2} = 0 \Rightarrow 2b - 2ab = 0 \Rightarrow 2b(1-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{b=0} \\ o \\ 1-a=0 \rightarrow \boxed{a=1} \end{cases}$$

Hay dos formas de conseguir lo pedido:

1ª forma.

$$\left. \begin{array}{l} b = 2 + 2a \\ b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + 2a = 0 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}} \text{ Esta opción no es válida pues } a > 0.$$

2ª forma.

$$\left. \begin{array}{l} b = 2 + 2a \\ a = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow b = 2 + 2 = 4 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}}$$

Se consigue lo pedido en el ejercicio con $a = 1$ y $b = 4$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 1 + \int_0^x te^t dt.$$

Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f y sus puntos de inflexión (abscisas donde se obtiene y valores que se alcanzan)).

Calculamos la expresión de la función $f(x)$ hallando la integral definida.

$$\int te^t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = t \rightarrow du = dt \\ dv = e^t dt \rightarrow v = \int e^t dt = e^t \end{array} \right\} = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + K$$

$$\int_0^x te^t dt = [te^t - e^t]_0^x = [xe^x - e^x] - [0e^0 - e^0] = xe^x - e^x + 1$$

$$f(x) = 1 + \int_0^x te^t dt = 1 + xe^x - e^x + 1 = xe^x - e^x + 2$$

Calculamos la derivada segunda y la igualamos a cero para obtener los posibles puntos de inflexión.

$$f(x) = xe^x - e^x + 2 \Rightarrow f'(x) = \cancel{e^x} + xe^x - \cancel{e^x} = xe^x \Rightarrow f''(x) = e^x + xe^x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow e^x + xe^x = 0 \Rightarrow e^x(1+x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x = 0, \text{ ¡Imposible!} \\ 0 \\ 1+x = 0 \rightarrow \boxed{x = -1} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de $x = -1$.

- En $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada segunda vale $f''(-2) = e^{-2} - 2e^{-2} < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, -1)$.
- En $(-1, +\infty)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f''(0) = e^0 + 0 \cdot e^0 = 1 > 0$. La función es convexa ($\cup$) en $(-1, +\infty)$.

La función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, -1)$ y convexa ($\cup$) en $(-1, +\infty)$.

Y tiene un punto de inflexión en $x = -1$. Como $f(-1) = -e^{-1} - e^{-1} + 2 = 2 - 2e^{-1} = 2 - \frac{2}{e}$ el

punto de inflexión tiene coordenadas $\left(-1, 2 - \frac{2}{e}\right)$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ (para $x \neq -1, x \neq 1$). Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(2, 4)$

Calculamos la integral de la función $f(x)$.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx = \dots$$

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2-1+2}{x^2-1} = \frac{x^2-1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}$$

$$\dots = \int 1 + \frac{2}{x^2-1} dx = \int 1 dx + \int \frac{2}{x^2-1} dx = x + \int \frac{2}{x^2-1} dx = \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^2-1} &= \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \\ \frac{2}{(x-1)(x+1)} &= \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow 2 = A(x+1)+B(x-1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \rightarrow 2 = A(0)+B(-2) \rightarrow 2 = -2B \rightarrow B = -1 \\ x=1 \rightarrow 2 = A(2)+B(0) \rightarrow 2 = 2A \rightarrow A = 1 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2}{x^2-1} &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

$$\dots = x + \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+1} dx = x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + K$$

Las primitivas de $f(x)$ son $F(x) = x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + K$.

La primitiva que pasa por $(2, 4)$ debe cumplir que $F(2) = 4$.

$$F(2) = 4 \Rightarrow 2 + \ln|2-1| - \ln|2+1| + K = 4 \Rightarrow 2 + 0 - \ln 3 + K = 4 \Rightarrow K = 2 + \ln 3$$

La primitiva pedida tiene la expresión $F(x) = x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + 2 + \ln 3$

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que $A^2 = -A^{-1}$. (1.25 puntos)

b) Dadas las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

calcula la matriz X que verifica $A^4 X + B = AC$. (1.25 puntos)

a) Calculamos A^2 y $-A^{-1}$ y vemos si son iguales.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3-4 & 0-12+12 & 0-15+16 \\ 0-4+5 & 3+16-15 & 4+20-20 \\ 0+3-4 & -3-12+12 & -4-15+16 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0+15+12-16-12-0 = -1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Como se observa se cumple que $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = -A^{-1}$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$A^4 X + B = AC \Rightarrow A^4 X = AC - B \Rightarrow A^2 A^2 X = AC - B \Rightarrow (-A^{-1})(-A^{-1}) X = AC - B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A^{-1})(A^{-1})X = AC - B \Rightarrow A(A^{-1})(A^{-1})X = AAC - AB \Rightarrow A^{-1}X = A^2C - AB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}X = -A^{-1}C - AB \Rightarrow AA^{-1}X = -AA^{-1}C - AAB \Rightarrow X = -C - A^2B \Rightarrow \boxed{X = -C + A^{-1}B}$$

Sustituyo cada matriz por su valor y determino la expresión de la matriz X.

$$X = -C + A^{-1}B = -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+0+4 & -1+0-5 \\ -1-12+16 & 1+0-20 \\ 1+9-12 & -1+0+15 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -19 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -21 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Una empresa de mensajería opera en tres rutas distintas A, B y C. Semanalmente hace un total de 70 viajes, y el número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C.

a) Si sabemos que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70, ¿podemos deducir el número de viajes por cada ruta? Razona la respuesta. **(1.25 puntos)**

b) Si el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5, ¿cuántos viajes hace por cada ruta? **(1.25 puntos)**

a) Llamamos a = número de viajes semanales en la ruta A, b = número de viajes semanales en la ruta B. c = número de viajes semanales en la ruta C.

“Semanalmente hace un total de 70 viajes” $\rightarrow a + b + c = 70$

“El número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C”

$\rightarrow b = a + c$

“El doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70” $\rightarrow 2(a + c) = 70$

Planteamos el sistema de ecuaciones y averiguamos si tiene solución.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 70 \\ b = a + c \\ 2(a + c) = 70 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 70 \\ -a + b - c = 0 \\ a + c = \frac{70}{2} = 35 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 70 \\ -a + b - c = 0 \\ a + c = 35 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} + \text{Ecuación 1ª} \\ -a + b - c = 0 \\ a + b + c = 70 \\ \hline 0 \quad 2b \quad 0 = 70 \\ \text{Nueva Ecuación 2ª} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ a + c = 35 \\ -a - b - c = -70 \\ \hline 0 \quad -b \quad 0 = -35 \\ \text{Nueva Ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 70 \\ 2b = 70 \\ -b = -35 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 70 \\ b = 35 \\ -b = -35 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} + \text{Ecuación 2ª} \\ -b = 35 \\ b = -35 \\ \hline 0 = 0 \\ \text{Nueva Ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 70 \\ b = 35 \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 70 \\ \boxed{b = 35} \end{array} \right\} \Rightarrow a + 35 + c = 70 \Rightarrow a + c = 35 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} b = 35 \\ a + c = 35 \end{cases}}$$

Se pueden encontrar muchas soluciones, pero no existe una solución única.

Habrían 35 viajes en la ruta B y otros 35 entre las rutas A y C.

Podría ser una solución $a = 0$, $b = 35$ y $c = 35$, pero también valdría como solución $a = 10$, $b = 35$ y $c = 25$ y aun podríamos dar muchas soluciones más.

- b) Si añadimos la condición “el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5” $\rightarrow 2c = b - 5$ y añadimos esta nueva ecuación al sistema tendremos que:

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 70 \\ \boxed{b = 35} \\ 2c = b - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + 35 + c = 70 \\ 2c = 35 - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + c = 35 \\ \boxed{c = 15} \end{array} \right\} \Rightarrow a + 15 = 35 \Rightarrow \boxed{a = 20}$$

En este caso la solución si es única y vale $a = 20$, $b = 35$ y $c = 15$.

La solución es 20 viajes en la ruta A, 35 en la ruta B y 15 en la ruta C.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

La recta perpendicular desde el punto $A(1,1,0)$ a un cierto plano π corta a éste en el punto

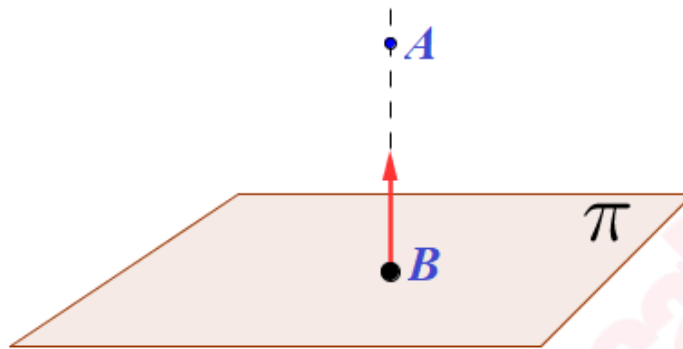
$$B = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

a) Calcula la ecuación del plano π . (1.5 puntos)

b) Halla la distancia del punto A a su simétrico respecto a π . (1 punto)

a)

La situación planteada es la del dibujo.

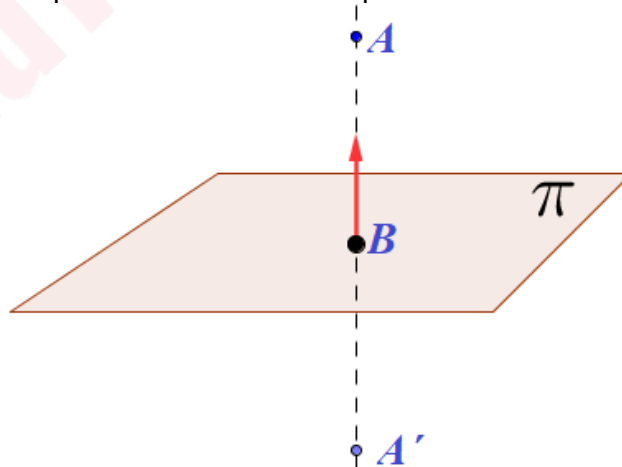


El vector $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular al plano, por lo que podemos considerarlo como vector normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \overrightarrow{AB} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - (1, 1, 0) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ B = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi \equiv -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + D = 0 \\ B = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \pi \equiv -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv -y + z = 0}$$

b) Dibujamos la situación planteada. Siendo A' al punto simétrico de A respecto del plano π .



La distancia entre A y su simétrico A' es el doble de la distancia entre A y el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 1, 0) \\ \pi \equiv -y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(A, A') = 2d(A, \pi) = 2 \frac{|-1 + 0|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{2} \text{ u}}$$

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de r y s . **(1.25 puntos)**

b) Halla la recta que corta perpendicularmente a r y a s . **(1.25 puntos)**

a) Obtenemos un punto y un vector director de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 0, -1) \\ P_r(3, 1, -3) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 - \beta \\ y = \beta \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (-1, 1, 0) \\ Q_s(1, 0, 0) \end{cases}$$

¿Los vectores directores tienen coordenadas proporcionales?

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 0, -1) \\ \vec{v}_s = (-1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{-1} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{-1}{0}$$

No tienen coordenadas proporcionales y las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

¿El producto mixto de $\vec{u}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{P_r Q_s}$ es cero o distinto de cero?

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{P_r Q_s} = (1, 0, 0) - (3, 1, -3) = (-2, -1, 3) \\ \vec{u}_r = (1, 0, -1) \\ \vec{v}_s = (-1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 + 3 - 2 = 0$$

Al ser nulo el producto mixto las rectas r y s se cortan en un punto.

b) La recta t que nos piden hallar tiene como vector director el producto vectorial de los vectores directores de ambas rectas y pasa por el punto C de corte de ambas rectas.

Hallamos el punto C de corte de r y s .

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 1 - \beta \\ y = \beta \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 3 + \lambda = 1 - \beta \\ 1 = \beta \\ -3 - \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2 - \beta \\ \beta = 1 \\ \lambda = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \lambda = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 1 = 0 \\ y = \beta = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(0, 1, 0)}$$

Hallamos el vector director de la recta t .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 0, -1) \\ \vec{v}_s = (-1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{w}_t = \vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$$

Hallamos la ecuación de la recta t con vector director $\vec{w}_t = \vec{u}_r \times \vec{v}_s$ y que pasa por $C(0, 1, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_t = (1, 1, 1) \\ C(0, 1, 0) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$