

Modelo 3 de 2006

Pendientes, cambios de variable, matrices y posiciones relativas.

Opción A - Ejercicio 1

La pendiente de la tangente en cada punto es $f'(x)$, así que buscamos el máximo de

$$f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2).$$

Derivando esta expresión,

$$f''(x) = 2xe^{-x^2}(2x^2 - 3).$$

Los puntos críticos de la pendiente son $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3/2}$. En los dos últimos la pendiente vale $-2e^{-3/2} < 0$, mientras que en $x = 0$ vale 1; además, la pendiente tiende a 0 en ambos infinitos. El máximo global se alcanza en el punto $(0, 0)$ de la curva. **Opción A - Ejercicio 2**

Con $t = 1 + x^2$, se tiene $dt = 2x, dx, x^2 = t - 1$ y $x^3 dx = (t - 1)dt/2$. Los límites pasan de $x = 0, 2$ a $t = 1, 5$:

$$I = \frac{1}{2} \int_1^5 \frac{t-1}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_1^5 (t^{1/2} - t^{-1/2}) dt = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{3}.$$

Opción A - Ejercicio 3

(a) Al elevar A al cuadrado,

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}, \quad A^2 - A = \begin{pmatrix} a^2 - a & -1 \\ 0 & a^2 + a \end{pmatrix}.$$

Igualando con la matriz del enunciado se obtiene $a^2 - a = 12$ y $a^2 + a = 20$. La única solución común es $a = 4$.

(b) Como A es de orden dos, $\det(2A) = 2^2 \det A$ y $\det(A^t) = \det A$. Puesto que $\det A = -a^2$,

$$\det(2A) = -4a^2, \quad \det(A^t) = -a^2.$$

(c) Una matriz simétrica debe tener iguales las entradas simétricas respecto de la diagonal. Aquí $A_{12} = 1$ y $A_{21} = 0$, por lo que A no es simétrica para ningún a . **Opción A - Ejercicio 4**

La recta se expresa en forma paramétrica como

$$r : (x, y, z) = (5, 0, 6) + t(-2, 1, m).$$

El vector normal del plano es $n = (2, 1, -1)$. El producto escalar de la dirección con n vale

$$(-2, 1, m) \cdot (2, 1, -1) = -3 - m.$$

Si $m = -3$, la dirección es paralela al plano. El punto $(5, 0, 6)$ no pertenece a π (al sustituir da $6 \neq 0$), así que la recta es paralela y exterior. Si $m \neq -3$, la dirección no es paralela y la recta corta al plano. Para $m = -3$, la dirección es $d = (-2, 1, -3)$. Un plano que contiene a r y es perpendicular a π debe tener un normal perpendicular tanto a d como a n ; podemos tomar $d \times n = (2, -8, -4)$. Pasando por $(5, 0, 6)$ se obtiene

$$x - 4y - 2z + 7 = 0.$$

Un plano paralelo a π tiene el mismo normal n ; el que pasa por $(5, 0, 6)$ es

$$2x + y - z - 4 = 0.$$

Opción B - Ejercicio 1

Usando $h = x - 1$, tenemos $\ln x = h - h^2/2 + o(h^2)$, por lo que

$$\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{2} + o(1).$$

Al restar $1/(x-1) = 1/h$, queda el límite

$$\boxed{\frac{1}{2}}.$$

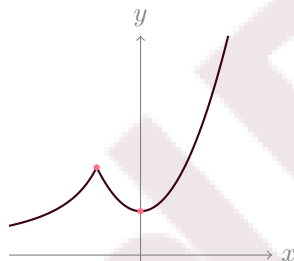
Opción B - Ejercicio 2

La continuidad en $x = -1$ requiere que el primer tramo y el límite del segundo coincidan: $a = (-1)^2 + 1 = 2$. La función queda

$$f(x) = \begin{cases} -2/x, & x \leq -1, \\ x^2 + 1, & x > -1. \end{cases}$$

Las ramas se unen en $(-1, 2)$; a la derecha aparece la parábola con vértice $(0, 1)$. Como ambas ramas son positivas en $[-2, 2]$, el área se calcula sin valor absoluto adicional:

$$S = \int_{-2}^{-1} \frac{-2}{x} dx + \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx = \boxed{2 \ln 2 + 6}.$$



Opción B - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad \det A = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Si $\lambda \neq -1, 0, 1$, el determinante no se anula y el sistema es SCD. Para $\lambda = 0$, $\text{rg } A = 2$ (hay un menor de orden dos no nulo), mientras que el sistema implica $y - z = 1$, $x + z = 0$ y $x + y = 0$, una contradicción; así $\text{rg } A^* = 3$ y es SI. Para $\lambda = 1$, el menor de las dos primeras filas y columnas $1, 3$ vale $2 \neq 0$, y el determinante es cero; por tanto $\text{rg } A = 2$. Las filas segunda y tercera de A^* coinciden, de modo que $\text{rg } A^* = 2$ y el sistema es SCL. Sus soluciones son

$$\boxed{(x, y, z) = (1 - t, t, 0)}.$$

Para $\lambda = -1$, la segunda ecuación es la opuesta de la primera, incluidos sus términos independientes; un menor de orden dos de A es no nulo y $\det A = 0$, de modo que $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2$. Es SCL y

$$\boxed{(x, y, z) = (0, 1 + t, t)}.$$

Para $\lambda = 2$, el sistema es SCD y su solución es $\boxed{(3/2, -1/2, 3/2)}$. **Opción B - Ejercicio 4**

Parametrizamos las rectas:

$$r : (x, y, z) = t(1, 1, 1), \quad s : (x, y, z) = (0, 0, -1) + u(1, -1, 2).$$

El segmento que une los puntos más próximos debe ser perpendicular a ambos vectores directores. Si $A \in r$ y $B \in s$, imponemos

$$(B - A) \cdot (1, 1, 1) = 0, \quad (B - A) \cdot (1, -1, 2) = 0.$$

Las ecuaciones resultantes son $2u - 3t - 1 = 0$ y $3u - t - 1 = 0$, de donde $u = 2/7$ y $t = -1/7$. Así,

$$\boxed{A = (-1/7, -1/7, -1/7), \quad B = (2/7, -2/7, -3/7)}.$$