Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2013--2014 · Opción 3

Soluciones originales, desarrolladas a partir del enunciado.

Opción A

Ejercicio 1 · Operaciones con matrices

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculamos los dos miembros de la igualdad:

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 1-a \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad (BA)^t = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-a \end{pmatrix}, \qquad AB^t = \begin{pmatrix} a-1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Al igualar las componentes, la primera da $-1 = a - 1$, luego $a = 0$; la segunda confirma el mismo valor, pues $1 - a = 1$.

$$\boxed{a = 0.}$$

b) Para $a = 2$, la ecuación $XA = B$ se resuelve por componentes. Si $X = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}$, entonces

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 2u+v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, $u = -1$ y $2u + v = 1$, de donde $v = 3$.

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}.}$$

Ejercicio 2 · Monotonía, extremos y curvatura

La función es polinómica, por lo que su dominio es $\mathbb{R}$. Para estudiar su monotonía usamos el signo de la derivada:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x, \qquad f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0.$$

La derivada solo se anula en $x = 1$, pero no cambia de signo: es positiva a ambos lados de ese punto. Por tanto, f es creciente en todo $\mathbb{R}$ y no tiene máximos ni mínimos relativos.

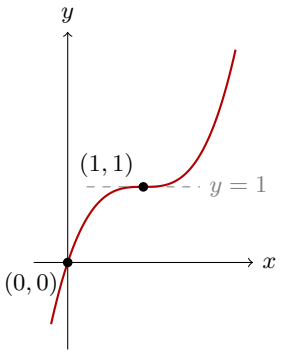
La segunda derivada permite estudiar la curvatura:

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1).$$

Si $x < 1$, $f''(x) < 0$ y la función es cóncava; si $x > 1$, $f''(x) > 0$ y es convexa. Como la curvatura cambia al pasar por $x = 1$, allí hay un punto de inflexión. Su ordenada es

$$f(1) = 1 - 3 + 3 = 1,$$

así que el punto de inflexión es $(1, 1)$. Además, $f(x) = (x-1)^3 + 1$, expresión que facilita representar la gráfica: es una cúbica creciente con tangente horizontal en su punto de inflexión y corta los ejes en $(0, 0)$.



$$\boxed{\text{Crece en } \mathbb{R};\ \text{no tiene extremos relativos; punto de inflexión } (1,1).}$$

Ejercicio 3 · Probabilidad de sucesos independientes

La probabilidad de que un adulto no fume es $0{,}65$, y la de que fume ocasionalmente es $0{,}15$. Al elegir dos personas al azar, modelizamos las elecciones como independientes.

a) Para que ninguno fume, deben ocurrir dos veces el suceso «no fuma». Multiplicamos las probabilidades de ambas elecciones:

$$P(\text{ninguno fuma}) = 0{,}65 \cdot 0{,}65 = 0{,}4225.$$

b) Hay dos órdenes incompatibles: primero no fumador y después fumador ocasional, o al revés. Sumamos las probabilidades de esos dos casos:

$$P(\text{uno no fuma y el otro fuma ocasionalmente}) = 0{,}65 \cdot 0{,}15 + 0{,}15 \cdot 0{,}65 = 2 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}15 = 0{,}195.$$

$$\boxed{P(\text{ambos no fumadores}) = 0{,}4225; \qquad P(\text{uno no fumador y otro ocasional}) = 0{,}195.}$$

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza para una proporción

En la muestra hay 19 balances incorrectos de 200, de modo que la proporción muestral es

$$\hat{p} = \frac{19}{200} = 0{,}095, \qquad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0{,}905.$$

Para una proporción, el intervalo aproximado de confianza es

$$\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},$$

donde n es el tamaño de la muestra y $z_{1-\alpha/2}$ es el valor crítico de la normal estándar. Para el 95%, $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$; el error es

$$E = 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}095 \cdot 0{,}905}{200}} \approx 0{,}04064.$$

Por tanto, el intervalo para la proporción poblacional es

$$[\,0{,}095 - 0{,}04064,\ 0{,}095 + 0{,}04064\,] \approx [\,0{,}05436,\ 0{,}13564\,].$$

Para un nivel de confianza del 99%, usamos $z_{0{,}995} \approx 2{,}576$. El error no debe superar $0{,}02$, así que despejamos n de $z\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n} \le 0{,}02$:

$$n \ge \frac{z^2 \hat{p}\hat{q}}{0{,}02^2} = \frac{2{,}576^2 \cdot 0{,}095 \cdot 0{,}905}{0{,}02^2} \approx 1426{,}09.$$

El tamaño debe ser entero y no inferior a esa cota.

$$\boxed{IC_{95\%} \approx [0{,}05436, 0{,}13564]; \qquad n_{\text{mín}} = 1427.}$$

Opción B

Ejercicio 1 · Región factible y mínimo de una función

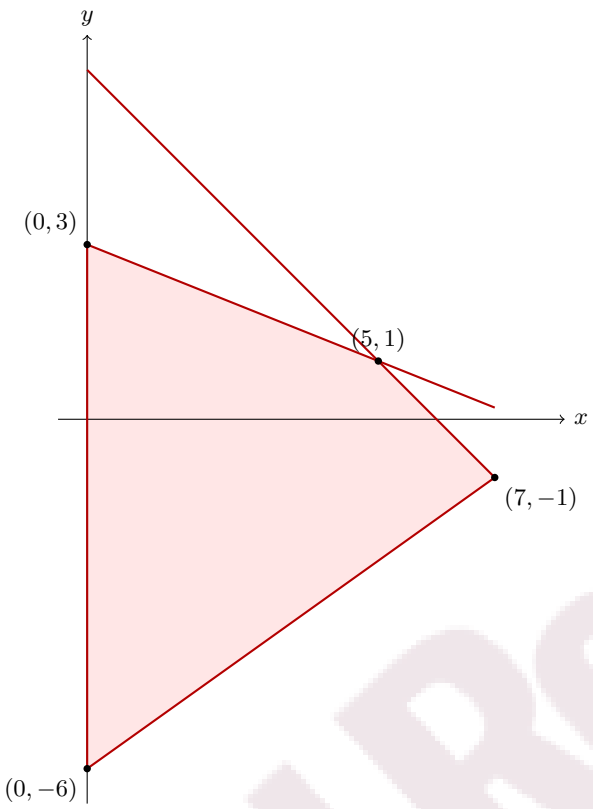
Solo se exige $x \ge 0$; no se impone que y sea positivo. Despejando y, las restricciones quedan

$$y \le 3 - \frac{2}{5}x, \qquad y \le 6 - x, \qquad y \ge \frac{5}{7}x - 6, \qquad x \ge 0.$$

El recinto se encuentra por debajo de las dos primeras rectas y por encima de la tercera. Sus vértices son las intersecciones que cumplen todas las desigualdades:

Fronteras que se cortan	Vértice
$x = 0,\ 2x + 5y = 15$	$(0, 3)$
$x = 0,\ 5x - 7y = 42$	$(0, -6)$
$2x + 5y = 15,\ x + y = 6$	$(5, 1)$
$x + y = 6,\ 5x - 7y = 42$	$(7, -1)$

La intersección de $2x + 5y = 15$ con $5x - 7y = 42$ no pertenece al recinto, pues no satisface $x + y \leq 6$. La figura representa la región factible:



Evaluamos $F(x, y) = -2x - 2y + 3 = 3 - 2(x + y)$ en los vértices:

(x, y)	$(0, 3)$	$(0, -6)$	$(5, 1)$	$(7, -1)$
$F(x, y)$	-3	15	-9	-9

El menor valor es -9. Como $F = 3 - 2(x + y)$, también toma ese valor en cualquier punto factible del lado $x + y = 6$, comprendido entre $(5, 1)$ y $(7, -1)$.

$$\boxed{F_{\text{min}} = -9 \text{ en todo el segmento entre } (5, 1) \text{ y } (7, -1).}$$

Ejercicio 2 · Continuidad, derivabilidad y asíntotas

La primera rama es polinómica para $x \leq 1$, y la segunda es racional para $x > 1$. Esta última no presenta denominadores nulos en su intervalo; por tanto, el dominio total es $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \leq 1, \\ \dfrac{4}{x}, & x > 1. \end{cases}$$

En $x = 1$, el valor y los límites laterales son

$$f(1) = 4, \qquad \lim_{x \to 1^-} (x+1)^2 = 4, \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{4}{x} = 4.$$

Coinciden, así que f es continua en $x = 1$, y también lo es en el resto de su dominio por ser cada rama continua. Para la derivabilidad comparamos las derivadas laterales:

$$f'_-(1) = 2(x+1)\big|_{x=1} = 4, \qquad f'_+(1) = -\frac{4}{x^2}\bigg|_{x=1} = -4.$$

Como son distintas, f no es derivable en $x = 1$.

En $x = 1$ los límites son finitos, así que no hay asíntota vertical; tampoco la hay en $x = 0$, donde la función está dada por la rama polinómica. Para $x \to +\infty$,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0,$$

por lo que $y=0$ es asíntota horizontal. Para $x\to-\infty$, $f(x)=(x+1)^2\to+\infty$, de modo que no hay asíntota horizontal. Tampoco puede haber una oblicua en ese extremo, pues

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2}{x}=-\infty,$$

y no existe una pendiente finita.
En $x=2$, usamos la rama $4/x$: $f(2)=2$ y $f'(2)=-4/2^2=-1$. La tangente es

$$y-2=-(x-2)\Longrightarrow y=-x+4.$$

Continua en $\mathbb{R}$; no derivable en 1; $y=0$ es asíntota horizontal en $+\infty$; tangente en $x=2$: $y=-x+4$.

Ejercicio 3 · Probabilidad condicionada

Sean A el suceso «el visitante es andaluz» y D el suceso «el visitante es adulto». Se conoce $P(A)=0{,}80$ y $P(D\mid A)=0{,}55$, por lo que

$$P(A\cap D)=P(A)P(D\mid A)=0{,}80\cdot0{,}55=0{,}44.$$

Además, el 17% de los visitantes son adultos no andaluces: $P(A^c\cap D)=0{,}17$. Así,

$$P(D)=P(A\cap D)+P(A^c\cap D)=0{,}44+0{,}17=0{,}61.$$

La probabilidad de que no sea adulto es la complementaria:

$$P(D^c)=1-P(D)=1-0{,}61=0{,}39.$$

Si sabemos que el visitante es adulto, la probabilidad de que sea andaluz se calcula condicionando:

$$P(A\mid D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{0{,}44}{0{,}61}=\frac{44}{61}\approx0{,}7213.$$

$P(\text{no adulto})=0{,}39;\qquad P(\text{andaluz}\mid\text{adulto})=\dfrac{44}{61}\approx0{,}7213.$

Ejercicio 4 · Muestreo y afijación proporcional

a) En el conjunto $\{6,9,12\}$, las muestras no ordenadas de tamaño 2 son las combinaciones

$$\{6,9\},\qquad\{6,12\},\qquad\{9,12\}.$$

Sus medias son, respectivamente, $7{,}5$, 9 y $10{,}5$. La media de estas medias es 9, y la varianza de la distribución de medias muestrales resulta

$$\operatorname{Var}(\bar X)=\frac{(7{,}5-9)^2+(9-9)^2+(10{,}5-9)^2}{3}=\frac{2{,}25+0+2{,}25}{3}=1{,}5.$$

b) El total de unidades fabricadas diariamente es

$$40+15+25+120=200.$$

En una afijación proporcional, a cada producto le corresponde la misma fracción de la muestra que representa en la producción total. Como $40/200$ de la producción es A, su muestra es $40\cdot40/200=8$; análogamente, para B, C y D obtenemos

$$n_A=8,\qquad n_B=3,\qquad n_C=5,\qquad n_D=24.$$

La suma $8+3+5+24=40$ confirma el tamaño pedido.

Varianza de las medias muestrales $=1{,}5$; $\qquad(n_A,n_B,n_C,n_D)=(8,3,5,24)$.