Lista de Exercícios: Análise Combinatória e Probabilidade

Lumen Edu

Exercícios de Fixação

1.

Quantos anagramas distintos podem ser formados com as letras da palavra "BANANA"?

2.

Uma pessoa tem 4 camisas, 3 calças e 2 pares de sapatos. De quantas maneiras diferentes ela pode se vestir, escolhendo uma camisa, uma calça e um par de sapatos?

3.

De quantas maneiras diferentes 6 amigos podem se sentar em uma fila?

4.

Em uma urna há 5 bolas vermelhas e 4 bolas azuis. Se retiramos 3 bolas, quantas maneiras diferentes existem de escolher 2 bolas vermelhas e 1 bola azul?

5.

Se lançamos dois dados justos, qual é a probabilidade de a soma dos números obtidos ser 7?

6.

Em uma classe de 30 alunos, 10 praticam futebol e 8 praticam natação. Se 3 alunos praticam ambos os esportes, qual é a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso praticar pelo menos um desses esportes?

—

7.

Quantos números de 4 dígitos distintos podem ser formados utilizando os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

8.

Uma caixa contém 10 bolas numeradas de 1 a 10. Se retiramos 3 bolas ao acaso, qual é a probabilidade de que a soma dos números dessas bolas seja maior que 15?

9.

Dada uma progressão aritmética de 5 termos, a soma dos 3 primeiros termos é 18 e a soma dos 3 últimos termos é 48. Qual é a razão dessa PA?

10.

Um sistema de controle de qualidade detecta produtos defeituosos com uma precisão de 95%. Sabe-se que 3% dos produtos são defeituosos. Se um produto foi classificado como defeituoso, qual é a probabilidade de ele realmente estar defeituoso?

—

11.

Quantas maneiras diferentes existem de organizar as letras da palavra "MATEMÁTICA"?

12.

Em uma sala com 12 pessoas, 5 serão escolhidas para formar uma equipe. De quantas maneiras diferentes podemos escolher essa equipe?

13.

Quantos números de 5 dígitos podem ser formados utilizando os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, se os dígitos podem se repetir?

14.

Qual é a probabilidade de tirar um número ímpar em um lançamento de um dado de 6 faces?

15.

Uma moeda é lançada 4 vezes. Qual é a probabilidade de obter exatamente 2 caras?

16.

De quantas maneiras podemos formar uma comissão com 3 homens e 2 mulheres, escolhidos de um grupo de 6 homens e 4 mulheres?

17.

Em uma classe de 25 alunos, quantas maneiras diferentes existem para escolher um presidente, um vice-presidente e um tesoureiro?

18.

Em uma competição de 10 atletas, de quantas maneiras diferentes podem ser distribuídas as medalhas de ouro, prata e bronze?

19.

Uma caixa contém 12 bolas idênticas. Quantas maneiras diferentes existem de distribuir essas bolas em 3 caixas?

20.

Quantas maneiras diferentes existem de escolher 3 bolas vermelhas de uma urna contendo 6 bolas vermelhas e 4 bolas azuis?

—

21.

Em um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de retirar uma carta que seja uma figura (valete, dama ou rei)?

22.

De quantas maneiras diferentes podemos permutar as letras da palavra "CIRCULAR"?

23.

Quantos subconjuntos de 3 elementos podem ser formados a partir do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$?

24.

De quantas maneiras diferentes podemos arranjar 5 livros em uma prateleira?

25.

Em uma urna com 10 bolas numeradas de 1 a 10, quantas maneiras diferentes existem de retirar 4 bolas, sabendo que a ordem das bolas não importa?

26.

Em uma urna com 15 bolas numeradas de 1 a 15, quantas maneiras diferentes existem de retirar 5 bolas, se as bolas retiradas devem ser ímpares?

27.

Qual é a probabilidade de tirar um múltiplo de 3 em um lançamento de um dado de 6 faces?

28.

Um casal tem 3 filhos. Qual é a probabilidade de que tenham 2 meninas e 1 menino?

29.

Qual é a probabilidade de que a soma dos números obtidos em dois lançamentos de dados seja menor ou igual a 5?

30.

Um teste para uma doença tem uma precisão de 98%. Sabe-se que 2% da população tem a doença. Qual é a probabilidade de que uma pessoa que testou positivo realmente tenha a doença?

—

Resoluções

1.

Anagramas da palavra ”BANANA” A palavra ”BANANA” tem 6 letras, mas as letras ”A” e ”N” se repetem. Portanto, a fórmula de permutações com repetição é:

$$P = \frac{6!}{3!2!} = \frac{720}{12} = 60$$

Logo, há 60 anagramas distintos.

—

2.

Maneiras diferentes de se vestir Usando o Princípio Fundamental da Contagem, multiplicamos o número de opções de camisas, calças e sapatos:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Portanto, há 24 maneiras diferentes de se vestir.

—

3.

Permutação de 6 amigos em uma fila O número de maneiras de organizar 6 pessoas em uma fila é dado por uma permutação simples:

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Logo, existem 720 maneiras diferentes.

—

4.

Escolhendo 2 bolas vermelhas e 1 bola azul Devemos usar combinações, pois a ordem não importa. O número de maneiras de escolher 2 bolas vermelhas de 5 é:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

O número de maneiras de escolher 1 bola azul de 4 é:

$$C_{4,1} = 4$$

Portanto, o número total de maneiras é:

$$10 \cdot 4 = 40$$

—

5.

Probabilidade de a soma ser 7 no lançamento de dois dados Os possíveis pares que resultam em uma soma de 7 são:

$$(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$$

Logo, há 6 pares favoráveis. Como o total de combinações possíveis ao lançar dois dados é $6 \times 6 = 36$, a probabilidade é:

$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

—

6.

Probabilidade de praticar pelo menos um esporte Vamos usar a fórmula da união de conjuntos. O número de alunos que praticam pelo menos um esporte é dado por:

$$n(F \cup N) = n(F) + n(N) - n(F \cap N) = 10 + 8 - 3 = 15$$

Portanto, a probabilidade é:

$$P = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

—

7.

Formação de números de 4 dígitos distintos Devemos usar permutações, pois a ordem importa. O primeiro dígito não pode ser 0, então temos 9 opções para o primeiro dígito. Para os outros 3 dígitos, temos 9, 8 e 7 opções respectivamente:

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$$

Portanto, há 4536 números de 4 dígitos distintos.

—

8.

Probabilidade de a soma das bolas ser maior que 15 Os subconjuntos de 3 bolas que satisfazem a condição de a soma ser maior que 15 são: - (6, 5, 4): soma = 15 - (6, 5, 3), (6, 5, 2), etc.

Ao listar todos os casos, há 12 combinações favoráveis. O total de combinações possíveis de 3 bolas retiradas de 10 é:

$$C_{10,3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

Portanto, a probabilidade é:

$$P = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$$

—

9.

Razão da PA de 5 termos Seja a PA formada pelos termos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Sabemos que:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 18 \quad \text{e} \quad a_3 + a_4 + a_5 = 48$$

Como a_3 aparece em ambas as somas, subtraindo as duas equações temos:

$$a_4 + a_5 - a_1 - a_2 = 30$$

Como $a_4 = a_1 + 3r$ e $a_5 = a_1 + 4r$, substituímos:

$$(a_1 + 3r) + (a_1 + 4r) - (a_1 + a_1 + r) = 30$$

Simplificando:

$$6r = 30 \quad \Rightarrow \quad r = 5$$

Logo, a razão da PA é 5.

—

10.

Probabilidade de o produto ser realmente defeituoso Usamos o Teorema de Bayes. Temos:

$$P(D|T) = \frac{P(T|D)P(D)}{P(T)}$$

Sabemos que:

$$P(T|D) = 0,95, \quad P(D) = 0,03, \quad P(T|\bar{D}) = 0,05, \quad P(\bar{D}) = 0,97$$

Calculando $P(T)$:

$$P(T) = P(T|D)P(D) + P(T|\bar{D})P(\bar{D}) = 0,95 \cdot 0,03 + 0,05 \cdot 0,97 = 0,0285 + 0,0485 = 0,077$$

Agora, calculamos $P(D|T)$:

$$P(D|T) = \frac{0,95 \cdot 0,03}{0,077} = \frac{0,0285}{0,077} \approx 0,37$$

Portanto, a probabilidade de o produto ser realmente defeituoso é 37

—

11.

Anagramas da palavra "MATEMÁTICA" A palavra "MATEMÁTICA" tem 10 letras, com 3 repetições de "A", 2 de "M" e 2 de "T". A fórmula de permutações com repetição é:

$$P = \frac{10!}{3!2!2!} = \frac{3628800}{12 \cdot 2 \cdot 2} = 151200$$

Logo, há 151200 anagramas possíveis.

—

12.

Escolha de 5 pessoas em um grupo de 12 O número de maneiras de escolher 5 pessoas de um grupo de 12 é dado pela combinação:

$$C_{12,5} = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 792$$

Logo, existem 792 maneiras diferentes de escolher a equipe.

—

13.

Formação de números de 5 dígitos com repetição permitida Cada dígito pode ser escolhido de 0 a 9, ou seja, temos 10 opções para cada dígito. Porém, o primeiro dígito não pode ser 0, logo temos 9 opções para o primeiro dígito e 10 opções para os outros 4:

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$$

Logo, há 90000 números possíveis.

—

14.

Probabilidade de tirar um número ímpar em um dado de 6 faces Os números ímpares em um dado de 6 faces são 1, 3 e 5. Logo, há 3 resultados favoráveis. A probabilidade é:

$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

—

15.

Probabilidade de obter 2 caras ao lançar uma moeda 4 vezes Este é um problema de distribuição binomial, onde temos 4 tentativas, com probabilidade de sucesso (cara) $p = \frac{1}{2}$. A fórmula da binomial é:

$$P(X = k) = C_{n,k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Substituindo $n = 4$, $k = 2$ e $p = \frac{1}{2}$:

$$P(X = 2) = C_{4,2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

—

16.

Escolha de 3 homens e 2 mulheres O número de maneiras de escolher 3 homens de um grupo de 6 é:

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$$

O número de maneiras de escolher 2 mulheres de um grupo de 4 é:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

Portanto, o número total de maneiras é:

$$20 \cdot 6 = 120$$

—

17.

Escolha de presidente, vice e tesoureiro Aqui a ordem importa, então usamos arranjos:

$$A_{25,3} = \frac{25!}{(25-3)!} = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800$$

Logo, há 13800 maneiras de escolher os 3 cargos.
—

18.

Distribuição de medalhas de ouro, prata e bronze Novamente a ordem importa, então usamos arranjos:

$$A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

Logo, há 720 maneiras de distribuir as medalhas.
—

19.

Distribuição de 12 bolas idênticas em 3 caixas Este é um problema de combinações com repetição. A fórmula é:

$$C_{n+p-1,p} = C_{12+3-1,12} = C_{14,2} = \frac{14 \cdot 13}{2!} = 91$$

Logo, há 91 maneiras de distribuir as bolas.
—

20.

Escolha de 3 bolas vermelhas Aqui a ordem não importa, então usamos combinações:

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$$

Logo, há 20 maneiras diferentes de escolher 3 bolas vermelhas.
—

21.

Probabilidade de retirar uma figura no baralho Há 3 figuras (valete, dama e rei) em cada naipe, e um baralho tem 4 naipes. Logo, há $3 \cdot 4 = 12$ figuras no total. A probabilidade é:

$$P = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

—

22.

Permutação das letras da palavra "CIRCULAR" A palavra "CIRCULAR" tem 8 letras, com 2 repetições de "C" e 2 de "R". A fórmula de permutações com repetição é:

$$P = \frac{8!}{2!2!} = \frac{40320}{4} = 10080$$

Logo, há 10080 maneiras diferentes de permutar as letras.

—

23.

Subconjuntos de 3 elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ Aqui a ordem não importa, então usamos combinações:

$$C_{7,3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$$

Logo, há 35 subconjuntos possíveis.

—

24.

Arranjo de 5 livros em uma prateleira Aqui a ordem importa, então usamos permutações:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Logo, há 120 maneiras de arranjar os livros.

—

25.

Retirada de 4 bolas de uma urna com 10 bolas Aqui a ordem não importa, então usamos combinações:

$$C_{10,4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210$$

Logo, há 210 maneiras de retirar 4 bolas.

—

26.

Retirada de 5 bolas ímpares de uma urna com 15 bolas As bolas ímpares são $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$. O número de maneiras de escolher 5 dessas 8 bolas é:

$$C_{8,5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = 56$$

Logo, há 56 maneiras de escolher as bolas.

—

27.

Probabilidade de tirar um múltiplo de 3 em um dado de 6 faces Os múltiplos de 3 em um dado são 3 e 6. Logo, há 2 resultados favoráveis. A probabilidade é:

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

—

28.

Probabilidade de ter 2 meninas e 1 menino em 3 filhos Cada criança pode ser menina (M) ou menino (H), então as possíveis sequências de 3 filhos são $2^3 = 8$. As sequências favoráveis são: MMH, MHM, HMM. Logo, a probabilidade é:

$$P = \frac{3}{8}$$

—

29.

Probabilidade de a soma dos dados ser menor ou igual a 5 As combinações que resultam em soma menor ou igual a 5 são:

$$(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)$$

Logo, há 10 combinações favoráveis. A probabilidade é:

$$P = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

—

30.

Probabilidade de ter a doença dado o teste positivo Usamos o Teorema de Bayes. Sabemos que:

$$P(D) = 0,02, \quad P(T|D) = 0,98, \quad P(T|\bar{D}) = 0,02$$

Primeiro, calculamos $P(T)$:

$$P(T) = P(T|D)P(D) + P(T|\bar{D})P(\bar{D}) = 0,98 \cdot 0,02 + 0,02 \cdot 0,98 = 0,0196 + 0,0196 = 0,0392$$

Agora, aplicamos o Teorema de Bayes:

$$P(D|T) = \frac{P(T|D)P(D)}{P(T)} = \frac{0,98 \cdot 0,02}{0,0392} = 0,5$$

Portanto, a probabilidade de a pessoa realmente ter a doença é 50