

Modelo 3 de 2002

Teorema fundamental del cálculo, funciones racionales, determinantes, sistemas y geometría espacial.

Opción A - Ejercicio 1

Como $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, el teorema fundamental del cálculo da $F'(x) = f(x)$. En el gráfico, f es positiva entre 0 y α , así que F crece en ese intervalo y

$$F(\alpha) = \int_0^\alpha f(t) dt > 0.$$

Por tanto, (i) es falsa. Como $f(\alpha) = 0$, $F'(\alpha) = 0$ y (ii) es verdadera. La positividad de f en $(0, \alpha)$ implica que (iii) también es verdadera. Si $f(t) = 1/\sqrt{t+1}$, entonces $F'(x) = f(x)$ y

$$F'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Opción A - Ejercicio 2

Dividimos el numerador entre el denominador:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1}, \quad x \neq 1.$$

El denominador se anula en $x = 1$ y el numerador allí vale 1, por lo que hay una asíntota vertical $x = 1$ (los límites laterales son $-\infty$ y $+\infty$). La diferencia entre $f(x)$ y $x - 1$ tiende a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$, así que $y = x - 1$ es la asíntota oblicua. Además,

$$f(x) - (x - 1) = \frac{1}{x - 1},$$

que es negativa si $x < 1$ y positiva si $x > 1$. La gráfica queda por debajo de la oblicua a la izquierda de la asíntota vertical y por encima a la derecha. **Opción A - Ejercicio 3**

Al desarrollar el determinante por la primera fila,

$$\det A = -(t - 4)(t + 1) = -t^2 + 3t + 4.$$

Es positivo entre sus raíces -1 y 4 , por tanto $-1 < t < 4$. Esta función cuadrática abre hacia abajo y alcanza su máximo en el punto medio de las raíces:

$$t = \frac{-1 + 4}{2} = \frac{3}{2}, \quad \det A \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{25}{4}.$$

Opción A - Ejercicio 4

La diagonal del cuadrado es el segmento AB :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 0, -4), \quad |AB| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}.$$

El área de un cuadrado es la mitad del cuadrado de su diagonal, de modo que $S = |AB|^2/2 = 10$. El plano pedido pasa por el punto medio $M = (A + B)/2 = (0, 0, 0)$ y es perpendicular a AB , que proporciona un vector normal. Su ecuación general es

$$x + 2z = 0.$$

Opción B - Ejercicio 1

En cada intervalo derivamos la expresión correspondiente:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{3+x^2}} - 1, & 0 < x < 1, \\ -\frac{1}{x^2} + \frac{x}{2}, & x > 1. \end{cases}$$

En $x = 1$, el valor de la primera rama es $\sqrt{4} - 1 = 1$, mientras que el límite por la derecha de la segunda es $1 + 1/4 = 5/4$. La función es discontinua en 1, así que no es derivable allí. Por tanto, su dominio de derivabilidad es $(0, 1) \cup (1, +\infty)$. **Opción B - Ejercicio 2**

Factorizamos el denominador y hacemos primero la división de polinomios:

$$\frac{3x^3 + 1}{x^2 - x - 2} = 3x + 3 + \frac{9x + 7}{(x-2)(x+1)} = 3x + 3 + \frac{25/3}{x-2} + \frac{2/3}{x+1}.$$

La integral definida queda

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{3x^3 + 1}{x^2 - x - 2} dx &= \left[\frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{25}{3} \ln|x-2| + \frac{2}{3} \ln|x+1| \right]_0^1 \\ &= \boxed{\frac{9}{2} - \frac{23}{3} \ln 2}. \end{aligned}$$

Opción B - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes tiene determinante

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 3 & 5 & m \end{vmatrix} = (m-7)(m-2).$$

Si $m \neq 2, 7$, el determinante no se anula y el sistema tiene una única solución; de hecho, $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ satisface las tres ecuaciones para cualquier m . Por ejemplo, $\boxed{m=0}$ cumple el apartado (a). Para $m = 2$, la tercera ecuación es combinación de las dos primeras y el sistema tiene rango 2 con tres incógnitas. Sus soluciones son

$$(x, y, z) = \left(-\frac{t}{4}, 1 - \frac{t}{4}, t \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

por lo que hay infinitas, y en particular al menos dos. También ocurre para $m = 7$. Así, una respuesta al apartado (b) es $\boxed{m=2}$. En todos los valores singulares $m = 2, 7$ el sistema sigue siendo compatible, y en los demás es compatible determinado; no hay ningún m para el que carezca de solución. El apartado (c) no es posible. **Opción B - Ejercicio 4**

El vector normal del plano π es $n = (1, -1, 2)$. La recta perpendicular que pasa por $A = (-1, -4, 2)$ tiene ese vector director y queda expresada paramétricamente como

$$\boxed{(x, y, z) = (-1, -4, 2) + t(1, -1, 2), \quad t \in \mathbb{R}}.$$

Para reflejar A respecto del plano, hallamos su distancia dirigida usando la ecuación $x - y + 2z - 3 = 0$:

$$(-1) - (-4) + 2 \cdot 2 - 3 = 4, \quad \|n\|^2 = 6.$$

El simétrico es $A' = A - 2(4/6)n$, por lo que

$$\boxed{A' = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{2}{3} \right)}.$$