

Examen de Matemáticas II (Selectividad - Modelo 2026)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Pregunta 1 (2 puntos) Un equipo de ingenieros está trabajando en un nuevo modelo de dron para tomar fotografías del estado del tráfico. Elegido un sistema de coordenadas, el dron tiene $A(1, 0, 2)$ como punto de partida y un cierto tramo de autopista está contenido en el plano $\pi : x + y + 2z + 1 = 0$. Las fotografías se deben tomar perpendicularmente al plano π . Se toma el punto $C(0, -3, 1)$ de π para calibrar el dron.

- a) (1 punto) Determine la distancia del dron en el punto de partida A al plano π y halle una ecuación del plano en el que el dron vuela manteniendo en todo momento la misma distancia al plano π . Este plano recibe el nombre de plano de vuelo.
- b) (1 punto) Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:
- a.1 El dron se mueve en línea recta en el plano de vuelo desde el punto de partida A al punto más cercano a C . Halle una ecuación de la recta que contiene la trayectoria lineal que recorre el dron para fotografiar C .
- a.2 La fotografía obtenida de C a esa distancia no tiene buena definición. Se decide acercar el dron desde el punto de partida A descendiendo perpendicularmente al plano π para situarse en A' , a la mitad de la distancia original. Calcule el ángulo formado por el plano π y la recta que pasa por C y A' .

Solución:

a) $D(A, \pi) = \frac{|1 + 0 + 4 + 1|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \text{ u}$

$$\pi' \parallel \pi \Rightarrow \pi' : x + y + 2z + K = 0 \xrightarrow{A \in \pi'} 1 + 0 + 4 + K = 0 \Rightarrow K = -5 \Rightarrow \pi' : x + y + 2z - 5 = 0$$

- b) a.1 Calculamos una recta $r \perp \pi$ tal que $C \in r$:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_\pi = (1, 1, 2) \\ P_r = C(0, -3, 1) \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Calculamos el punto de corte de r con π' :

$$(\lambda) + (-3 + \lambda) + 2(1 + 2\lambda) - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow C'(1, -2, 3)$$

La recta s buscada pasa por A y C' :

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = \overrightarrow{AC'} = (1, -2, 3) - (1, 0, 2) = (0, -2, 1) \\ P_s = A(1, 0, 2) \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} x = 1 \\ y = -2\mu \\ z = 2 + \mu \end{cases} \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

- a.2 Calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $A \in t$:

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_\pi = (1, 1, 2) \\ P_t = A(1, 0, 2) \end{cases} \Rightarrow t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Calculamos el punto de corte de t con π :

$$(1 + \lambda) + (\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + 1 = 0 \implies \lambda = -1 \implies A''(0, -1, 0)$$

$$\text{El punto } A' = \frac{A + A''}{2} = \frac{(1, 0, 2) + (0, -1, 0)}{2} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

Calculamos la recta h que pasa por C y A' :

$$h: \begin{cases} \vec{u}_h = \overrightarrow{A'C} = (0, -3, 1) - \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = -\frac{1}{2}(1, 5, 0) \implies \\ P_h = C(0, -3, 1) \end{cases}$$

$$h: \begin{cases} x = \beta \\ y = -3 + 5\beta \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$$

Calculamos el ángulo formado por h y π :

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{\vec{u}_h \cdot \vec{u}_\pi}{|\vec{u}_h| \cdot |\vec{u}_\pi|} = \frac{(1, 5, 0) \cdot (1, 1, 2)}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{156}} = \frac{\sqrt{39}}{13} \implies$$

$$\alpha = 28^\circ 42' 38''$$

Pregunta 2 (2 puntos) Dada $f(x) = \frac{x^2 + 1}{|x| + 1}$, se pide:

a) (1 punto) Analizar la paridad y los extremos relativos de $f(x)$.

b) (1 punto) Hallar $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

Solución:

a) $f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{|-x| + 1} = \frac{x^2 + 1}{|x| + 1} = f(x) \implies f$ es una función PAR, simétrica respecto al eje OY.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{|x| + 1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2 + 1}{x + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \implies$$

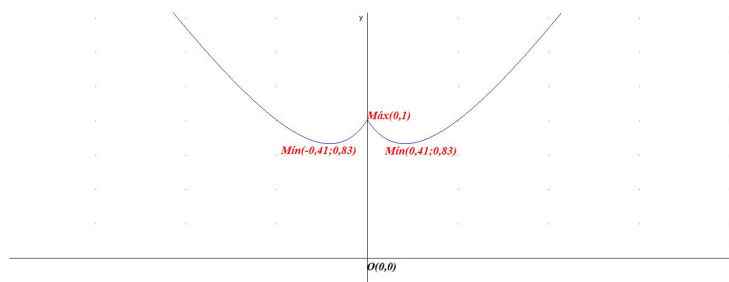
$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2} = 0 \implies x = 1 - \sqrt{2}, \quad x = 1 + \sqrt{2} \text{ no válida} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2} = 0 \implies x = -1 + \sqrt{2}, \quad x = -1 - \sqrt{2} \text{ no válida} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

	$(-\infty, 1 - \sqrt{2})$	$(1 - \sqrt{2}, 0)$	$(0, -1 + \sqrt{2})$	$(-1 + \sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 1 - \sqrt{2}) \cup (0, -1 + \sqrt{2})$ y creciente en el $(1 - \sqrt{2}, 0) \cup (-1 + \sqrt{2}, \infty)$.

La función tiene dos mínimos absolutos en $(1 - \sqrt{2}; -2 + 2\sqrt{2}) \simeq (-0,4142; 0,8284)$ y en el $(-1 + \sqrt{2}; -2 + 2\sqrt{2}) \simeq (0,4142; 0,8284)$.

La función tiene un máximo relativo en $(0, 1)$.



$$b) \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{x^2 + 1}{-x + 1} dx = \left[\frac{\frac{x^2 + 1}{-x + 1} : (-x + 1) = -x - 1 + \frac{2}{-x + 1}}{\frac{x + 1}{-x + 1} \cdot \frac{-x + 1}{2}} \right] =$$

$$\int_{-1}^0 \left(-x - 1 - 2 \frac{-1}{-x + 1} \right) dx = \left[-\frac{x^2}{2} - x - 2 \ln |1 - x| \right]_{-1}^0 = 0 - \frac{1}{2} + 2 \ln 2 \simeq 0,8863$$

Pregunta 3 (2,5 puntos) Una envasadora de aceitunas comercializa bolsas con 12 aceitunas. La cosecha de este año ha sido atacada por el hongo *Sphaeropsis dalmatica* y una de cada veinte aceitunas presenta la enfermedad escudete. Se pide:

- (1 punto) Calcular la probabilidad de que una bolsa no tenga aceitunas con la enfermedad.
- (1 punto) Los controles sanitarios han fallado y se han distribuido 100 bolsas de aceitunas de esta cosecha. Calcular, aproximando por una distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos el 60 % de las bolsas distribuidas tenga alguna aceituna con escudete.

Solución:

- Tenemos $n = 12$, $p = \frac{19}{20} = 0,95$ y $q = \frac{1}{20} = 0,05 \implies B(12; 0,95)$

$$P(X = 12) = \binom{12}{12} \cdot 0,95^{12} \cdot 0,05^0 = 0,5404$$

- Ahora tenemos $n = 100$ y $p = 1 - 0,5404 = 0,4596 \implies B(100; 0,4596)$

Como $n = 100 > 30$, $np = 45,96 > 30$ y $nq = 54,04 > 5 \implies$

$$B(100; 0,4596) \stackrel{N(np; \sqrt{npq})}{\approx} N(45,96; 4,984)$$

$$P(Y \geq 0,6 \cdot 100) = P(Y \geq 60) = P\left(Z \geq \frac{59,5 - 45,96}{4,984}\right) =$$

$$P(Z \geq 2,72) = 1 - P(Z \leq 2,72) = 1 - 0,9967 = 0,0033$$

Pregunta 4 (2 puntos) **Responda a uno de los dos apartados siguientes a) o b)**

- (2 puntos) Sean $a \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Se pide:

- a.1 (1 punto) Calcular, si existen, los valores de a tales que la matriz AA^t sea una matriz diagonal.
- a.2 (1 punto) Calcular, si existen, los valores de a tales que $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$.
- b) (2 puntos) Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + \lambda y + z = 7 \\ x + 2y + \lambda z = 2 \end{cases}$. Se pide:
- b.1 (1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro real λ .
- b.2 (1 punto) Resolver el sistema si $\lambda = -1$.

Solución:

a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a.1 $AA^t = \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a & a \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a^2 + 4 & 2a^2 - 2 \\ 2a^2 - 2 & a^2 + 1 \end{pmatrix}$.

Para que AA^t sea una matriz diagonal tiene que cumplirse $2a^2 - 2 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$.

a.2 $(A - B)(A + B) = A^2 + AB - BA - B^2 = A^2 - B^2 \Rightarrow AB - BA = O \Rightarrow AB = BA$

$$AB = \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + 2 & 4a - 4 \\ a - 1 & 2a + 2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a + 2 & 4a - 4 \\ a - 1 & 2a + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 2 = 4a \Rightarrow a = 1 \\ 4a - 4 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1$$

b) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + \lambda y + z = 7 \\ x + 2y + \lambda z = 2 \end{cases}$. Se pide:

b.1 $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & 1 & 7 \\ 1 & 2 & \lambda & 2 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \text{ y } \lambda = 4$.

• Si $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 4\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{número de incógnitas} \Rightarrow \text{sistema compatible determinado (solución única)}$

• Si $\lambda = 4$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 - 5F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema incompatible (no tiene solución)}$$

• Si $\lambda = -1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

$$\text{b.2 } \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -5y + 3z = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \mu \\ y = 9 - 3\mu \\ z = 16 - 5\mu \end{cases} \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

Pregunta 5 (2 puntos) **Responda a uno de los dos apartados siguientes a) o b)**

a) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-8 + \cos x) & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ a \sin x + 4 & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 2 \sin(2x) + b & \text{si } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

a.1 (1 punto) Halle los valores de a y b para que se verifiquen las hipótesis del Teorema de Bolzano en $[0, 2\pi]$.

a.2 (1 punto) Justifique razonadamente que la función $f(x)$ tiene una única raíz en el intervalo $(0, 2\pi)$ y calcule dicha raíz.

b) Se considera la función $\begin{cases} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Se pide:

b.1 (1 punto) Determinar si $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

b.2 (1 punto) Determinar si $f(x)$ es derivable en el punto $x = 0$ y, si existe, calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ para $x = 0$.

Solución:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-8 + \cos x) & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ a \sin x + 4 & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 2 \sin(2x) + b & \text{si } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$

a.1 Para que se cumplan las hipótesis del Teorema de Bolzano en $[0, 2\pi]$ la función tiene que ser continua en este intervalo.

Las tres ramas son continuas por ser composición de funciones continuas. Hay que imponer la continuidad en $x = \frac{\pi}{2}$ y en $x = \pi$.

☛ Continuidad en $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{1}{2}(-8 + \cos x) = -4 & \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} f(x) = f(\pi/4) \\ \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} (a \sin x + 4) = a + 4 \\ f(\pi/4) = a + 4 \end{cases} \implies -4 = a + 4 \implies a = -8.$$

☛ Continuidad en $x = \pi$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} (a \sin x + 4) = 4 & \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = f(\pi) \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} (2 \sin(2x) + b) = b \\ f(\pi) = b \end{cases} \implies b = 4.$$

☛ $a = -8$ y $b = 4$.

Como $f(0) = -\frac{7}{2}$ y $f(2\pi) = b = 8$ cumple las hipótesis del teorema de Bolzano que afirma que $\exists c \in (0, 2\pi) | f(c) = 0$

a.2 Tenemos

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-8 + \cos x) = 0 \implies \cos x = 8 \text{ imposible} & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -8 \sin x + 4 = 0 \implies \sin x = \frac{1}{2} & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 2 \sin(2x) + 4 \implies \sin(2x) = -2 \text{ imposible} & \text{si } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

Luego el único punto de corte posible es el que cumple:

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ y } x \in (\pi/2, \pi) \implies x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

b) Se considera la función $\begin{cases} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Se pide:

b.1 La función logaritmo es continua. Hay que analizar la continuidad en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{x^2 + 1}}{1} = 0 = f(0) \implies f \text{ continua en } x = 0 \implies f \text{ continua en } \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \text{b.2 } f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+0) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(h^2 + 1)}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(h^2 + 1)}{h^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2h}{h^2 + 1}}{2h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{2h(h^2 + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2 + 1} = 1 \end{aligned}$$

Luego la función es derivable en $x = 0$.

La pendiente de la recta tangente es $m = f'(0) = 1$ y el punto de tangencia es $(0, f(0)) = (0, 0)$

$$y - f(0) = m(x - 0) \implies y = x.$$