

Resolución de los ocho ejercicios con justificación y resultados exactos.

Ejercicio 1

En $x = 0$ la continuidad exige $b = f(0) = -1$. En $x = 2$ la función del segundo tramo debe tener un extremo, por lo que su derivada allí ha de ser nula. Para $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{a(x+1) - 2(ax+b)}{(x+1)^3}, \quad f'(2) = \frac{-a-2b}{27} = 0.$$

Con $b = -1$ resulta $a = 2$. Para estudiar la derivabilidad en el punto de unión $x = 0$, las derivadas laterales son

$$f'_-(0) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} \Big|_{x=0} = -1, \quad f'_+(0) = \frac{a(x+1) - 2(ax+b)}{(x+1)^3} \Big|_{x=0} = 4.$$

Como no coinciden, f no es derivable en $x = 0$.

Ejercicio 2

La figura consta de un rectángulo central de lados a, b y dos semicírculos que forman una circunferencia completa de diámetro b . El área central impone $ab = 200/\pi$, es decir, $a = 200/(\pi b)$. Los dos tramos rectos miden en total $2a$ y la longitud circular es πb ; por las tarifas, el coste es

$$C(b) = 10(2a) + 20(\pi b) = \frac{4000}{\pi b} + 20\pi b, \quad b > 0.$$

Derivamos para localizar el mínimo:

$$C'(b) = -\frac{4000}{\pi b^2} + 20\pi = 0 \implies b^2 = \frac{200}{\pi^2}.$$

Como las longitudes son positivas, $b = 10\sqrt{2}/\pi$, y entonces $a = 10\sqrt{2}$. Además, $C''(b) = 8000/(\pi b^3) > 0$, de modo que el coste es mínimo. Las dimensiones pedidas son

$$\boxed{a = 10\sqrt{2} \text{ m}, \quad b = \frac{10\sqrt{2}}{\pi} \text{ m} .}$$

Ejercicio 3

Integramos por partes dos veces. Si $I = \int e^x \sin(2x) dx$, tomando $u = \sin(2x)$ y $dv = e^x dx$,

$$I = e^x \sin(2x) - 2 \int e^x \cos(2x) dx.$$

En la integral restante se vuelve a integrar por partes, con lo que $I = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4I$. Por tanto,

$$I = \frac{e^x}{5} (\sin(2x) - 2 \cos(2x)) + C.$$

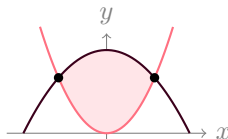
La condición $F(0) = 0$ da $-2/5 + C = 0$, luego

$$\boxed{F(x) = \frac{e^x (\sin(2x) - 2 \cos(2x)) + 2}{5} .}$$

Ejercicio 4

Los puntos de corte se obtienen de $1 - x^2 = 2x^2$, luego $x = \pm 1/\sqrt{3}$ y $y = 2/3$. Entre ambos puntos, $1 - x^2$ está por encima de $2x^2$, por ejemplo en $x = 0$. Así, el área encerrada es

$$S = \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} (1 - 3x^2) dx = [x - x^3]_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} = \boxed{\frac{4}{3\sqrt{3}}}.$$



Ejercicio 5

Calculamos el determinante y la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$\det A = 2, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Para la ecuación matricial, desarrollamos con cuidado el cuadrado, pues el producto de matrices no es conmutativo:

$$AX + (A - X)^2 = X^2 + I \implies AX + A^2 - AX - XA + X^2 = X^2 + I \implies XA = A^2 - I.$$

Como A es invertible, multiplicamos por A^{-1} a la derecha:

$$X = (A^2 - I)A^{-1} = A - A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6

Las tres fases ocupan el 75% de las ocho horas, es decir, $0.75 \cdot 480 = 360$ minutos. Si la fase I dura x minutos, la III dura $4x$ y la II dura $2(x + 4x) = 10x$, de acuerdo con las dos relaciones del enunciado. Por tanto,

$$x + 10x + 4x = 360 \implies x = 24.$$

Así, las fases I, II y III duran, respectivamente, $\boxed{24, 240 \text{ y } 96 \text{ minutos}}$.

Ejercicio 7

La recta r es el eje Y : pasa por O y tiene director $(0, 1, 0)$. La recta s se obtiene de $x + y = 1$, $x - y = 1$, de donde $x = 1$, $y = 0$ y z es libre; es paralela al eje Z . Un plano que contiene r y es paralelo a s contiene los directores $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, por lo que su normal es paralela al eje X . Al pasar por el origen, su ecuación general es $\boxed{x = 0}$. Un plano perpendicular a s tiene un vector normal paralelo al director de s , es decir, al eje Z . El plano $z = 0$ contiene r y tiene ese normal; por tanto, la segunda ecuación es $\boxed{z = 0}$.

Ejercicio 8

Parametrizamos r usando $x = t$, $y = 1$, $z = 1 - 2t$. Las distancias de $(t, 1, 1 - 2t)$ a los planos son

$$d_1 = \frac{|x + y + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|t + 3|}{\sqrt{2}}, \quad d_2 = \frac{|x - z - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|3t - 2|}{\sqrt{2}}.$$

Igualarlas equivale a $|t + 3| = |3t - 2|$, que da $t = 5/2$ o $t = -1/4$. Los puntos son $\boxed{(5/2, 1, -4)}$ y $\boxed{(-1/4, 1, 3/2)}$. El ángulo entre planos es el ángulo agudo entre sus normales $n_1 = (1, 1, 0)$ y $n_2 = (1, 0, -1)$:

$$\cos \theta = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{\|n_1\| \|n_2\|} = \frac{1}{2}, \quad \boxed{\theta = 60^\circ}.$$