

Resolución razonada de los cuatro problemas de cada ejercicio. El examen permite elegir tres problemas de uno de los ejercicios; aquí se desarrollan todos.

Ejercicio A

Problema 1 · Optimización de la producción de aceite

Sean x e y las hectáreas plantadas con olivos de tipo A y B. La producción que queremos maximizar, en litros anuales, es $P = 500x + 300y$. Las limitaciones de terreno, agua e inversión se traducen en

$$0 \leq x \leq 8, \quad 0 \leq y \leq 10, \quad 4x + 3y \leq 44, \quad 500x + 225y \leq 4500.$$

Para resolver el problema lineal, comparamos la producción en los vértices de la región factible. Sobre los límites del terreno aparecen $(8, 0)$ y $(0, 10)$. Las intersecciones con los límites de inversión o agua que delimitan la región son $(8, 20/9)$ y $(7/2, 10)$. La intersección común de las dos restricciones de recursos se obtiene resolviendo

$$\begin{cases} 4x + 3y = 44, \\ 500x + 225y = 4500, \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 3y = 44, \\ 20x + 9y = 180, \end{cases} \Rightarrow x = 6, \quad y = \frac{20}{3}.$$

Junto con el origen, estos puntos son los vértices factibles. Evaluamos en ellos la función objetivo:

(x, y)	$(0, 0)$	$(8, 0)$	$(8, 20/9)$	$(6, 20/3)$	$(7/2, 10)$	$(0, 10)$
$P = 500x + 300y$	0	4000	14000/3	5000	4750	3000

El valor mayor de la tabla es 5000 litros, alcanzado en $(6, 20/3)$. Ambas cantidades respetan las cotas de superficie y las dos disponibilidades de recursos.

$6 \text{ ha de tipo A y } \frac{20}{3} \text{ ha de tipo B; } P_{\max} = 5000 \text{ litros anuales.}$

Problema 2 · Ecuación matricial

Queremos despejar X en $AX = 2B - C$. Primero calculamos por separado el segundo miembro:

$$2B = 2 \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad 2B - C = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 13 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -15 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz A es invertible porque

$$\det A = 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-5) = 5 \neq 0.$$

Por tanto, multiplicamos la igualdad por A^{-1} a la izquierda. Para una matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la fórmula general es $M^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, siempre que $ad - bc \neq 0$. Aplicándola a A , obtenemos

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = A^{-1}(2B - C) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -15 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos sustituyendo el resultado en la ecuación original:

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -15 & 0 \end{pmatrix} = 2B - C.$$

$X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$

Problema 3 · Temperatura en función de la altitud

La relación es lineal, así que tiene la forma $T(h) = mh + n$. A nivel del mar, $h = 0$ y $T = 60^\circ\text{F}$, por lo que $n = 60$. Por cada 5000 m que aumenta la altitud, la temperatura baja 18°F ; esta variación fija determina la pendiente:

$$m = \frac{\Delta T}{\Delta h} = \frac{-18}{5000} = -\frac{9}{2500}^\circ\text{F/m}.$$

Así,

$$T(h) = 60 - \frac{9}{2500}h, \quad 0 \leq h \leq 20000.$$

A 15000 m,

$$T(15000) = 60 - \frac{9}{2500}(15000) = 60 - 54 = 6^\circ\text{F}.$$

Para hallar la altitud a la que la temperatura es cero, resolvemos $T(h) = 0$:

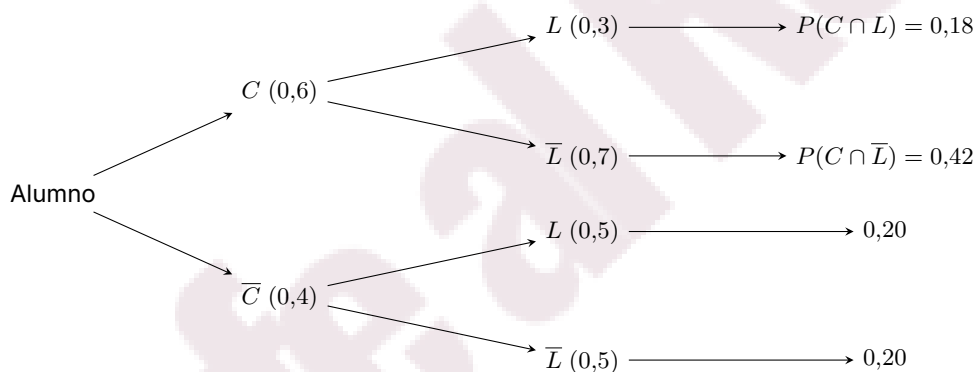
$$60 - \frac{9}{2500}h = 0 \Rightarrow h = \frac{60 \cdot 2500}{9} = \frac{50000}{3} \text{ m} \approx 16666,7 \text{ m}.$$

Este valor pertenece al intervalo $[0, 20000]$ indicado en el enunciado.

$T(h) = 60 - \frac{9}{2500}h; \quad T(15000) = 6^\circ\text{F}; \quad T = 0 \text{ a } \frac{50000}{3} \text{ m}.$
--

Problema 4 · Lectura de una revista y probabilidad condicionada

Sean C el suceso «ser chica» y L el suceso «leer la revista». Las probabilidades de cada rama se toman del enunciado; las probabilidades de los extremos se obtienen multiplicando las ramas recorridas.



La probabilidad de leerla suma los caminos que terminan en L :

$$P(L) = P(C)P(L | C) + P(\bar{C})P(L | \bar{C}) = 0,6 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,5 = 0,38 = \frac{19}{50}.$$

Para invertir la condición en b), aplicamos la fórmula de probabilidad condicionada. El denominador es la probabilidad de no leer, $P(\bar{L}) = 1 - 0,38 = 0,62$; el numerador es el camino «chica y no lee»:

$$P(C | \bar{L}) = \frac{P(C \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = \frac{0,6 \cdot 0,7}{0,62} = \frac{21}{31}.$$

$P(L) = \frac{19}{50} = 0,38, \quad P(C \bar{L}) = \frac{21}{31} \approx 0,6774.$

Ejercicio B

Problema 1 · Producción e ingresos

Sean x e y los aparatos A y B que se fabrican a la semana. El ingreso es $I = 100x + 150y$. Las horas disponibles en los talleres X e Y limitan la producción:

$$3x + y \leq 100, \quad x + 2y \leq 100, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

El ingreso, al ser una función lineal, alcanza su máximo en un vértice de la región factible. Sobre el eje x ($y = 0$), la restricción más exigente es $3x \leq 100$, por lo que el vértice es $(100/3, 0)$. Sobre el eje y ($x = 0$), se obtiene $y \leq 50$ y el vértice es $(0, 50)$. Además del origen, hallamos el vértice de intersección resolviendo las dos restricciones como igualdades:

$$\begin{cases} 3x + y = 100, \\ x + 2y = 100, \end{cases} \Rightarrow y = 100 - 3x, \quad x + 2(100 - 3x) = 100 \Rightarrow x = 20, \quad y = 40.$$

Comparamos el ingreso en esos vértices:

(x, y)	$(0, 0)$	$(100/3, 0)$	$(20, 40)$	$(0, 50)$
$I = 100x + 150y$	0	10000/3	8000	7500

El mayor ingreso es 8000 euros; se obtiene en una combinación entera de aparatos y consume exactamente las 100 horas disponibles en ambos talleres.

Se deben fabricar 20 aparatos A y 40 aparatos B; el ingreso máximo es 8000 €.

Problema 2 · Recta paralela por un punto de intersección

Primero encontramos el punto por el que debe pasar la recta. Sustituimos $y = 3x - 2$ en $3x - 2y = 1$:

$$3x - 2(3x - 2) = 1 \Rightarrow -3x = -3 \Rightarrow x = 1, \quad y = 3(1) - 2 = 1.$$

La recta buscada es paralela a $y = 2x - 3$, por lo que tiene el mismo vector director $(1, 2)$. Pasando por $(1, 1)$, su forma paramétrica es

$$x = 1 + t, \quad y = 1 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Al eliminar el parámetro se obtiene la ecuación equivalente $y = 2x - 1$.

$$r : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 + 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Problema 3 · Mínimo y máximo del consumo

El número de revoluciones está entre 2000 y 5000 rpm, de modo que la variable x , medida en miles de rpm, pertenece a $[2, 5]$. La función polinómica del consumo está definida para todo real, pero aquí solo estudiamos ese intervalo:

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 23, \quad 2 \leq x \leq 5.$$

Para localizar los puntos críticos derivamos y resolvemos $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

Para justificar el signo de la derivada en los dos intervalos, probamos $x = 2,5$ antes de 3 y $x = 4$ después de 3: $f'(2,5) = -2 < 0$ y $f'(4) = 4 > 0$. El consumo decrece hasta $x = 3$ y luego crece, por lo que allí se alcanza el mínimo. Como el intervalo es cerrado, para hallar el máximo absoluto comparamos también los extremos:

$$f(2) = 2(2)^2 - 12(2) + 23 = 7, \quad f(3) = 5, \quad f(5) = 2(5)^2 - 12(5) + 23 = 13.$$

El menor valor es 5 y el mayor es 13. Recordamos que $x = 3$ representa 3000 rpm y $x = 5$, 5000 rpm.

$f_{\min} = 5 \text{ L/h a } 3000 \text{ rpm}; \quad f_{\max} = 13 \text{ L/h a } 5000 \text{ rpm}.$
--

Problema 4 · Extracción de caramelos sin reemplazo

Hay 18 caramelos en total. Como se extraen sin devolverlos a la bolsa, la probabilidad de cada sabor cambia después de cada extracción. **a)** La probabilidad de obtener naranja, después fresa y luego limón se calcula multiplicando las probabilidades de esas tres extracciones sucesivas:

$$P(O, F, L) = \frac{10}{18} \cdot \frac{3}{17} \cdot \frac{5}{16} = \frac{25}{816} \approx 0,0306.$$

b) Para que los tres caramelos sean de sabores diferentes, debe salir uno de cada sabor. Sin distinguir el orden, el número de grupos favorables es $\binom{10}{1}\binom{5}{1}\binom{3}{1}$; el número total de grupos de tres caramelos es $\binom{18}{3}$. Por tanto,

$$P(\text{tres sabores distintos}) = \frac{\binom{10}{1}\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{18}{3}} = \frac{150}{816} = \frac{25}{136} \approx 0,1838.$$

$P(O, F, L) = \frac{25}{816}, \quad P(\text{tres sabores distintos}) = \frac{25}{136}.$
