

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Junio de 2024 · Convocatoria ordinaria

Se resuelven los seis problemas para ofrecer una propuesta completa.

Problema 1 · Venta de televisores

Sean x, y, z las cantidades vendidas de los modelos ULED, QLED y LD. Los precios son 1250, 1125 y 1000 euros, respectivamente. El total de unidades y la condición de ventas dan

$$x + y + z = 220, \quad y + z = 3x.$$

De aquí, $4x = 220$, luego $x = 55$ y $y + z = 165$. La recaudación permite completar el sistema:

$$1250(55) + 1125y + 1000z = 247250 \implies 1125y + 1000z = 178500.$$

Sustituimos $z = 165 - y$:

$$1125y + 1000(165 - y) = 178500 \implies 125y = 13500 \implies y = 108, \text{quad } z = 57.$$

$$\boxed{55 \text{ ULED, } 108 \text{ QLED, } 57 \text{ LD.}}$$

Problema 2 · Ecuaciones matriciales

Las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) De $X^{-1}A + A = B$ se obtiene $X^{-1}A = B - A$. Multiplicamos por la derecha por A^{-1} y después invertimos la igualdad:

$$X^{-1} = (B - A)A^{-1} \implies X = A(B - A)^{-1}.$$

Como

$$B - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

resulta

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Agrupamos los términos con Y :

$$(A - B)Y - AY = I \implies -BY = I.$$

Como $\det B = 2 \neq 0$, $Y = -B^{-1}$, y

$$Y = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

c) La matriz A es invertible porque es triangular con diagonal de unos. Multiplicamos $AZA^{-1} = I$ por A^{-1} a la izquierda y por A a la derecha:

$$Z = A^{-1}IA = I.$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad Z = I.}$$

Problema 3 · Estudio de una función racional

La función se simplifica usando el denominador:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x(x - 3) + (x + 1)} = \frac{x(x - 3)}{(x - 1)^2}.$$

a) El denominador solo se anula en $x = 1$, así que $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Los cortes con X son $(0,0)$ y $(3,0)$; el corte con Y también es $(0,0)$.

b) En $x = 1$ el numerador vale -2 y el denominador tiende a cero por valores positivos, por lo que hay una asíntota vertical $x = 1$. Los grados coinciden y el cociente de coeficientes principales es 1 , de modo que la asíntota horizontal es $y = 1$.

c) y d) El signo de la derivada indica la monotonía:

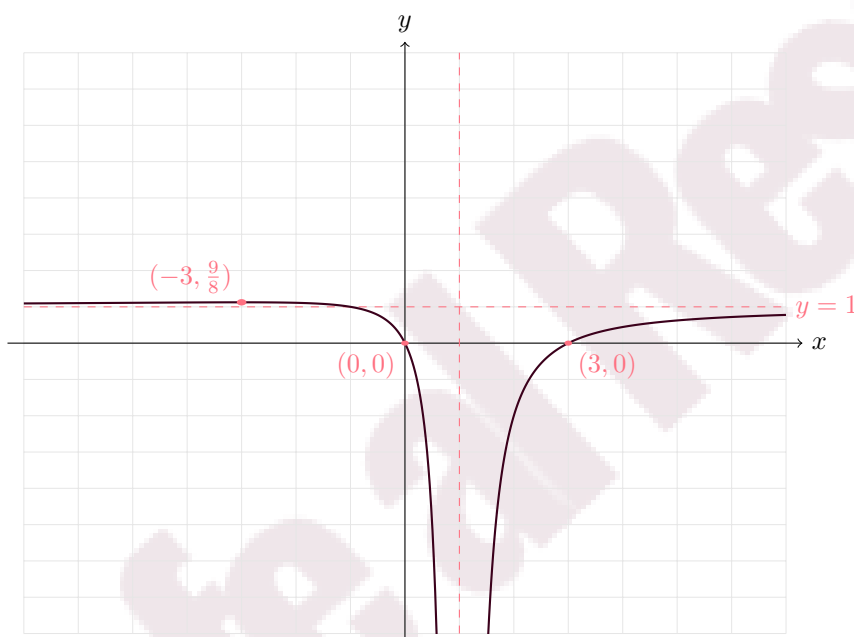
$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-3x)}{(x-1)^4} = \frac{x+3}{(x-1)^3}.$$

El punto crítico es $x = -3$ y hay que separar también el punto excluido $x = 1$. El signo de f' es positivo en $(-\infty, -3)$, negativo en $(-3, 1)$ y positivo en $(1, +\infty)$. Así, hay un máximo local en $x = -3$:

$$f(-3) = \frac{(-3)(-6)}{(-4)^2} = \frac{9}{8}.$$

No hay mínimo local.

e) La gráfica se obtiene con los cortes, las asíntotas y el máximo:



$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad \text{AV: } x = 1, \text{ AH: } y = 1; \quad \max_{\text{loc}} f = (-3, \frac{9}{8}).$$

Problema 4 · Función definida a trozos

La función es

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 24x, & x \leq -1, \\ (x-1)^2 + 3, & x > -1. \end{cases}$$

a) Para que sea continua en $x = -1$, el valor del primer tramo debe coincidir con el límite del segundo:

$$f(-1) = -1 + a - 24 = a - 25, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 7.$$

Igualando, $a = 32$.

b) Si $a = 9$, en el intervalo indicado $(-9/2, -3/2)$ se aplica el primer tramo. Sus puntos críticos cumplen

$$f'(x) = 3x^2 + 18x + 24 = 3(x+4)(x+2) = 0,$$

por lo que son $x = -4$ y $x = -2$. El signo de la derivada es positivo, negativo y positivo en los tres intervalos que determinan; hay máximo local en -4 y mínimo local en -2 :

$$f(-4) = -16, \quad f(-2) = -20.$$

c) Si $a = 0$, en $[2, 3]$ se usa $(x-1)^2 + 3$, que está por encima del eje X . El área es

$$\int_2^3 ((x-1)^2 + 3) dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3} + 3x \right]_2^3 = \frac{16}{3}.$$

$$a = 32; \quad \max_{\text{loc}} f = (-4, -16), \quad \min_{\text{loc}} f = (-2, -20); \quad \text{área} = \frac{16}{3}.$$

Problema 5 · Conocimientos de idiomas

Sean I y A los sucesos de saber inglés y alemán. Se conoce $P(I \cap A) = 0,30$, $P(I) = 0,40$ y $P(I | A) = 0,40$.

a) De la fórmula de la probabilidad condicionada,

$$P(A) = \frac{P(I \cap A)}{P(I | A)} = \frac{0,30}{0,40} = 0,75.$$

b) La probabilidad de saber alemán y no inglés es

$$P(A \cap I^c) = P(A) - P(A \cap I) = 0,75 - 0,30 = 0,45.$$

c) Si el directivo no sabe alemán, $P(A^c) = 0,25$. Además, $P(I \cap A^c) = 0,40 - 0,30 = 0,10$, así que

$$P(I | A^c) = \frac{0,10}{0,25} = 0,40.$$

$$P(A) = 0,75; \quad P(A \cap I^c) = 0,45; \quad P(I | A^c) = 0,40.$$

Problema 6 · Dado y monedas

Sea D el suceso de obtener más de 2 en el dado; $P(D) = 4/6 = 2/3$. Si ocurre D , las monedas son equilibradas. En caso contrario, para la moneda defectuosa $P(C) = 3/4$ y $P(X) = 1/4$, porque la probabilidad de cara es triple que la de cruz.

a) Aplicamos Bayes al suceso de obtener dos caras, CC :

$$P(D | CC) = \frac{P(D)P(CC | D)}{P(D)P(CC | D) + P(D^c)P(CC | D^c)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{16}} = \frac{8}{17}.$$

b) Sea L «sale un número menor o igual que 2» y H «aparece al menos una cara». El complemento de $L \cup H$ es $L^c \cap H^c$: dado D , que no salga ninguna cara tiene probabilidad $1/4$. Por tanto,

$$P(L \cup H) = 1 - P(D \cap \text{dos cruces}) = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{6}.$$

c) Para que salga un seis y dos cruces, con un seis se utiliza la moneda equilibrada:

$$P(6 \cap \text{dos cruces}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

La probabilidad marginal de dos cruces es

$$P(\text{dos cruces}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$$

Como $P(6)P(\text{dos cruces}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{16} = \frac{1}{32} \neq \frac{1}{24}$, los sucesos no son independientes.

$$P(D | CC) = \frac{8}{17}; \quad P(L \cup H) = \frac{5}{6}; \quad 6 \text{ y dos cruces no son independientes.}$$