

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Septiembre de 2009 · Convocatoria extraordinaria

Se resuelven los cuatro problemas de cada bloque para abarcar la propuesta completa.

Bloque A

Problema A1 · Ecuación matricial con parámetros

Leemos de la matriz el sistema $x + y + z = 1$, $y - z = -1$, $x + 2y = 0$. La tercera ecuación es la suma de las dos primeras, y el término correspondiente también coincide; por ello hay dos ecuaciones independientes para tres incógnitas. Tomando $z = \lambda$ como parámetro, la segunda ecuación da $y = \lambda - 1$ y la primera $x = 2 - 2\lambda$:

$$X = \begin{pmatrix} 2 - 2\lambda \\ \lambda - 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La primera fila de la matriz columna es nula cuando $2 - 2\lambda = 0$, es decir, cuando $\lambda = 1$.

$$X = \begin{pmatrix} 2 - 2\lambda \\ \lambda - 1 \\ \lambda \end{pmatrix}; \quad X_{11} = 0 \text{ para } X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Problema A2 · Encuesta de opinión

Sean F, C, N las personas a favor, en contra y sin opinión. Del enunciado,

$$F + C + N = 360, \quad F = 2(C + N), \quad (F + C) - N = 2(F - C).$$

La primera y la segunda ecuaciones dan $3(C + N) = 360$, así que $F = 240$ y $C + N = 120$. En la tercera igualdad sustituimos $F = 240$:

$$240 + C - N = 480 - 2C \implies 3C - N = 240.$$

Con $C + N = 120$, se obtiene $4C = 360$, luego $C = 90$ y $N = 30$.

$$240 \text{ a favor,} \quad 90 \text{ en contra,} \quad 30 \text{ sin opinión.}$$

Bloque B

Problema B1 · Función racional

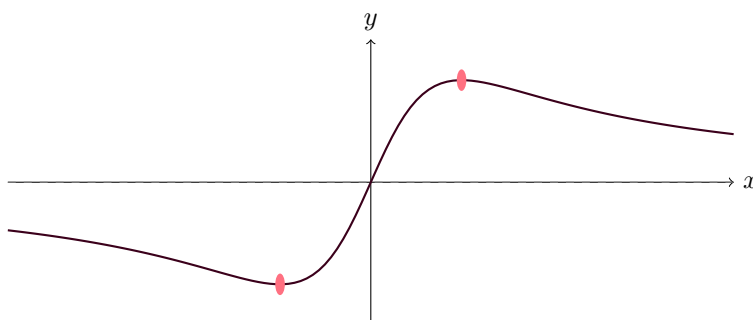
Para $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, el denominador es siempre positivo; por tanto el dominio es $\mathbb{R}$, no hay asíntotas verticales y el corte con ambos ejes es $(0, 0)$. Como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, la asíntota horizontal es $y = 0$. Derivamos:

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}.$$

El denominador es positivo y el numerador se anula en $x = \pm 1$. El signo es negativo fuera de $[-1, 1]$ y positivo dentro, de modo que

$$\begin{array}{c|ccc} I & (-\infty, -1) & (-1, 1) & (1, \infty) \\ \hline f & \text{decrece} & \text{crece} & \text{decrece} \end{array}$$

Así, $x = -1$ da un mínimo $f(-1) = -1/2$ y $x = 1$ un máximo $f(1) = 1/2$.



$$D_f = \mathbb{R}; (0, 0); y = 0; \min(-1, -\frac{1}{2}), \max(1, \frac{1}{2}).$$

Problema B2 · Ingresos, costes y beneficio

Si se venden x cajas a 80 € cada una, los ingresos son $I(x) = 80x$. El coste es $C(x) = 0,1x^2 + 20x + 2500$, de modo que el beneficio, diferencia entre ingresos y costes, queda

$$B(x) = I(x) - C(x) = -0,1x^2 + 60x - 2500.$$

Es una parábola cóncava. Su vértice, que da el máximo, tiene abscisa $x = -60/[2(-0,1)] = 300$; entonces $B(300) = -9000 + 18000 - 2500 = 6500$.

$$I(x) = 80x, \quad B(x) = -0,1x^2 + 60x - 2500; \quad B_{\max} = 6500 \text{ € al producir 300 cajas.}$$

Bloque C

Problema C1 · Consumo de dos productos

Sean A y B los sucesos «consume el producto A» y «consume el producto B». El 25% no consume ninguno, así que $P(A \cup B) = 0,75$. Por inclusión-exclusión,

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,50 + 0,40 - 0,75 = 0,15.$$

La probabilidad de consumir solo uno es $P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,60$. Finalmente,

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,15}{0,50} = 0,30.$$

$$P(A \cap B) = 0,15, \quad P(\text{solo uno}) = 0,60, \quad P(B | A) = 0,30.$$

Problema C2 · Tipo de vehículo y primera compra

Sean T «turismo», R «todoterreno», P «primera compra» y N «no es la primera compra». Se tiene $P(T) = 0,75$, $P(R) = 0,25$, $P(P | R) = 0,20$ y $P(P | T) = 0,40$. Multiplicamos probabilidades sucesivas de cada rama:

$$P(N) = 0,75 \cdot 0,60 + 0,25 \cdot 0,80 = 0,65.$$

El apartado b) pide la probabilidad conjunta de que la compra sea primera y de tipo turismo; el apartado c), compra no primera y todoterreno.

$$P(N) = 0,65, \quad P(T \cap P) = 0,75 \cdot 0,40 = 0,30, \quad P(R \cap N) = 0,25 \cdot 0,80 = 0,20.$$

Bloque D

Problema D1 · Planificación de apartamentos

Sean x y y los números de apartamentos de lujo y superlujo, respectivamente. En millones de euros, las restricciones son

$$x + 1,5y \leq 60, \quad x \geq y, \quad x \leq 45, \quad x, y \geq 0.$$

Queremos maximizar $x + y$. Los vértices factibles son $(0, 0)$, $(45, 0)$, $(45, 10)$ y $(24, 24)$. Evaluamos el total de viviendas en ellos: 0, 45, 55 y 48. En $(45, 10)$ el presupuesto se agota, pues $45 + 1,5 \cdot 10 = 60$.

Construirá 45 apartamentos de lujo y 10 de superlujo: 55 en total, agotando los 60 millones.

Problema D2 · Región factible y optimización lineal

Reescribimos las restricciones como

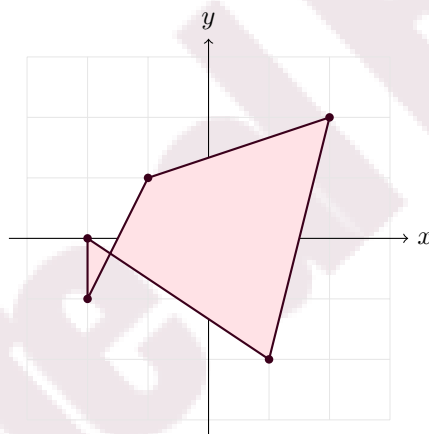
$$x \geq -2, \quad x + 3y \geq -5, \quad -4x + y \geq -6, \quad -x + 3y \leq 4, \quad -x + y \leq 2.$$

Al intersectar las rectas frontera y conservar solo los puntos que satisfacen todas las desigualdades, resultan los vértices

$$(-2, -1), \quad (-1, 1), \quad (2, 2), \quad (1, -2), \quad (-2, 0).$$

La función lineal $F(x, y) = 2x - 3y$ alcanza sus extremos en estos vértices. Evaluamos:

(x, y)	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(2, 2)$	$(1, -2)$	$(-2, 0)$
$2x - 3y$	-1	-5	-2	8	-4



$$F_{\min} = -5 \text{ en } (-1, 1), \quad F_{\max} = 8 \text{ en } (1, -2).$$