Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2010--2011 · Modelo 3

Soluciones originales de las dos opciones, con desarrollo de los cálculos y justificación de los métodos empleados.

Opción A

Ejercicio 1 · Ecuación matricial y grafos

Sean

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En la ecuación $2X - C - D = (I_3 + D)C$, aislamos X:

$$X = \frac{1}{2}\big((I_3 + D)C + C + D\big).$$

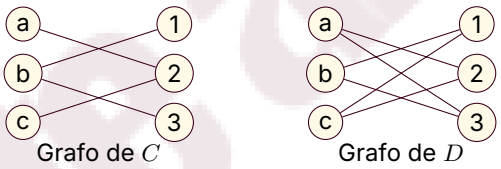
Calculamos primero el producto de matrices:

$$DC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (I_3 + D)C = C + DC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$X = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

En una matriz de adyacencia, una entrada 1 indica que los dos vértices correspondientes están unidos por una arista. Así, C representa las aristas $a2, b1, b3, c2$, mientras que D representa $a2, a3, b1, b3, c1, c2$. Los dibujamos con las dos clases de vértices en columnas:



Grafo de C Grafo de D

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

Ejercicio 2 · Crecimiento y extremos en un intervalo

La velocidad está restringida a $25 \le x \le 175$, que es el dominio relevante. El consumo es

$$c(x) = 7{,}5 - 0{,}05x + 0{,}00025x^2.$$

Sustituyendo las velocidades solicitadas:

$$c(50) = 7{,}5 - 0{,}05 \cdot 50 + 0{,}00025 \cdot 50^2 = 5{,}625 \text{ L},$$

$$c(150) = 7{,}5 - 0{,}05 \cdot 150 + 0{,}00025 \cdot 150^2 = 5{,}625 \text{ L}.$$

El signo de la derivada permite determinar el crecimiento y el decrecimiento:

$$c'(x) = -0{,}05 + 0{,}0005x = 0{,}0005(x - 100).$$

El único punto crítico del intervalo es $x = 100$. Para $25 \le x < 100$, $c'(x) < 0$, y para $100 < x \le 175$, $c'(x) > 0$. Por tanto, el consumo decrece hasta 100 km/h y crece después. El mínimo se alcanza en el punto crítico; el máximo de un intervalo cerrado se compara entre los extremos:

$$c(100) = 5 \text{ L}, \qquad c(25) = c(175) = 6{,}40625 \text{ L}.$$

Mínimo: 5 L a 100 km/h; máximo: $6{,}40625$ L a 25 y 175 km/h.

Ejercicio 3 · Probabilidad condicionada e independencia

Se conocen $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$ y $P(A \mid B) = 0{,}5$. Por la definición de probabilidad condicionada,

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2.$$

La probabilidad de que ocurra al menos uno es la de la unión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}7.$$

Si sabemos que ocurrió A, la probabilidad de que no ocurra B es

$$P(B^c \mid A) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}5 - 0{,}2}{0{,}5} = 0{,}6.$$

Para comprobar la independencia, verificamos si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$:

$$P(A)P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2 = P(A \cap B),$$

por lo que A y B son independientes.

$P(A \cup B) = 0{,}7$; $P(B^c \mid A) = 0{,}6$; A y B son independientes.

Ejercicio 4 · Contraste unilateral para la media

El banco afirma que la media no supera los 120 euros. Contrastamos esa afirmación frente a la posibilidad de que la media sea mayor:

$$H_0 : \mu \leq 120, \qquad H_1 : \mu > 120.$$

La población es normal, $\sigma = 67$ euros, $n = 100$ y $\bar{x} = 130$. Bajo el valor frontera $\mu_0 = 120$,

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, \qquad z_{\text{obs}} = \frac{130 - 120}{67/\sqrt{100}} = \frac{100}{67} \approx 1{,}493.$$

Para $\alpha = 0{,}05$, el valor crítico de una cola es $z_{0{,}95} \approx 1{,}645$. La región de aceptación, expresada en medias muestrales, es

$$\bar{X} \leq 120 + 1{,}645\frac{67}{10} \approx 131{,}02 \text{ €}.$$

Como $130 < 131{,}02$ (equivalentemente, $1{,}493 < 1{,}645$), no se rechaza H_0. La muestra no da evidencia suficiente para afirmar que la retirada media supere los 120 euros.

No se rechaza H_0 al 5%; no hay evidencia suficiente de que $\mu > 120$ €.

Opción B

Ejercicio 1 · Optimización con restricciones

Sean x e y las unidades semanales de los productos A y B. Las horas de las dos máquinas imponen

$$2x + 4y \leq 100, \qquad 5x + 3y \leq 110, \qquad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

El beneficio que queremos maximizar es $G(x, y) = 70x + 50y$. Los vértices factibles son $(0, 0)$, $(0, 25)$, la intersección de las dos rectas de capacidad y $(22, 0)$. Para la intersección:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 100, \\ 5x + 3y = 110 \end{cases} \implies (x, y) = (10, 20).$$

La función lineal se evalúa en los vértices:

(x, y)	$(0, 0)$	$(0, 25)$	$(10, 20)$	$(22, 0)$
$G(x, y)$	0	1250	1700	1540

Producir 10 unidades de A y 20 de B; $G_{\text{max}} = 1700$ € semanales.

Ejercicio 2 · Continuidad, derivabilidad y asíntotas

La función es $f(x) = 2/(x+2)$ si $x \le 0$, y $f(x) = 2/(x-2)$ si $x > 0$. Su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. En el punto de cambio, el valor y los límites laterales son

$$f(0) = 1, \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -1.$$

Como los límites laterales no coinciden, hay una discontinuidad de salto en $x = 0$, y la función no es derivable allí. En cada tramo es racional con denominador no nulo, por lo que es continua y derivable en el resto de su dominio.

La asíntota vertical se busca donde se anula un denominador. Al acercarnos a -2 por la izquierda, $2/(x+2) \to -\infty$, así que $x = -2$ es vertical. Para las horizontales:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

de modo que $y = 0$ es asíntota horizontal en ambos extremos. No hay oblicua porque ya existe una horizontal para cada sentido del infinito.

$$\boxed{\text{Discontinuidad de salto en } x = 0; \quad x = -2 \text{ vertical}; \quad y = 0 \text{ horizontal.}}$$

Ejercicio 3 · Probabilidad total y Bayes

Sean M «seguro médico», V «seguro de vida» y R «no hay retraso en el pago». Los tipos de operación son incompatibles y cubren todos los casos: $P(M) = 0{,}2$, $P(V) = 0{,}8$. La probabilidad de no retraso se obtiene sumando los caminos:

$$P(R) = P(M)P(R \mid M) + P(V)P(R \mid V) = 0{,}2 \cdot 0{,}10 + 0{,}8 \cdot 0{,}15 = 0{,}14.$$

Si hubo retraso, aplicamos Bayes para hallar qué proporción corresponde a seguros de vida. Las probabilidades de retraso son $0{,}90$ en médicos y $0{,}85$ en vida:

$$P(V \mid R^c) = \frac{P(V)P(R^c \mid V)}{P(M)P(R^c \mid M) + P(V)P(R^c \mid V)} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}85}{0{,}2 \cdot 0{,}90 + 0{,}8 \cdot 0{,}85} = \frac{34}{43} \approx 0{,}7907.$$

$$\boxed{P(\text{sin retraso}) = 14\%; \qquad P(\text{vida} \mid \text{retraso}) = \frac{34}{43} \approx 79{,}07\%.}$$

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza y tamaño muestral

La media muestral es $\bar{x} = 1{,}73$ m y se conoce $\sigma = 0{,}04$ m, con $n = 60$. Para confianza del 97%, $z_{0{,}985} \approx 2{,}1701$. El intervalo para la media es

$$\bar{x} \pm z_{0{,}985}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad E = 2{,}1701\frac{0{,}04}{\sqrt{60}} \approx 0{,}01122 \text{ m},$$

$$IC_{97\%}(\mu) \approx (1{,}71878, 1{,}74122) \text{ m}.$$

La amplitud total es $2E = 2z_{0{,}985}\sigma/\sqrt{n}$, por lo que se reduce al aumentar n. Para exigir que sea inferior a $0{,}08$ m:

$$\frac{2 \cdot 2{,}1701 \cdot 0{,}04}{\sqrt{n}} < 0{,}08 \Longrightarrow n > 4{,}71.$$

El menor tamaño entero que cumple la desigualdad es 5.

$$\boxed{IC_{97\%}(\mu) \approx (1{,}71878, 1{,}74122) \text{ m}; \qquad n_{\min} = 5.}$$