

Se desarrollan todas las alternativas del modelo. En la prueba basta con contestar a las opciones que se elijan.

Pregunta 1 - Geometría en el espacio

El plano de la autopista es $\pi : x + y + 2z + 1 = 0$, con vector normal $\vec{n} = (1, 1, 2)$. Para hallar la distancia de $A = (1, 0, 2)$ a π , usamos la fórmula punto-plano:

$$d(A, \pi) = \frac{|1 + 0 + 2 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

El plano de vuelo debe ser paralelo a π y pasar por A , pues así el dron conserva esa distancia. Tiene el mismo vector normal y ecuación $x + y + 2z + D = 0$. Al sustituir A obtenemos $D = -5$. **Conclusión.** La distancia es $\sqrt{6}$ y el plano de vuelo es $x + y + 2z - 5 = 0$.

b1) Trayectoria hacia el punto del plano de vuelo más cercano a C

La distancia de un punto a un plano se alcanza sobre la perpendicular al plano. Por ello, proyectamos $C = (0, -3, 1)$ ortogonalmente sobre el plano de vuelo $\pi_v : x + y + 2z - 5 = 0$:

$$F(C) = 0 - 3 + 2 - 5 = -6, \quad B = C - \frac{F(C)}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = (0, -3, 1) - \frac{-6}{6} (1, 1, 2) = (1, -2, 3).$$

La recta buscada pasa por A y B . Su vector director es

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -2, 3) - (1, 0, 2) = (0, -2, 1).$$

Así, en forma paramétrica,

$$r : \begin{cases} x = 1, \\ y = -2t, \\ z = 2 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. La trayectoria lineal viene dada por la recta r anterior.

b2) Ángulo entre π y la recta CA'

La proyección ortogonal de A sobre π es

$$H = A - \frac{F(A)}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = (1, 0, 2) - \frac{6}{6} (1, 1, 2) = (0, -1, 0).$$

Como A' está a mitad de camino entre A y el plano, es el punto medio de A y H :

$$A' = \frac{A + H}{2} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right).$$

Un vector director de CA' es

$$\overrightarrow{CA'} = A' - C = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) - (0, -3, 1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0 \right),$$

que podemos sustituir por el vector proporcional $\vec{u} = (1, 5, 0)$. Si α es el ángulo entre una recta y un plano, el ángulo entre la recta y un vector normal al plano es complementario; por tanto,

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{n}\|} = \frac{|(1, 5, 0) \cdot (1, 1, 2)|}{\sqrt{26} \sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{156}} = \sqrt{\frac{3}{13}}.$$

Conclusión. El ángulo pedido es $\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{3}{13}} \approx 28,7^\circ$.

Pregunta 2 - Análisis e integral

La función está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, ya que $|x| + 1 > 0$. Además, $f(-x) = f(x)$, pues tanto $x^2 + 1$ como $|x| + 1$ no cambian al sustituir x por $-x$. Por tanto, f es par.

Para estudiar los extremos, derivamos por separado a cada lado de 0, donde cambia la expresión del valor absoluto. Si $x > 0$,

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}, \quad f'(x) = \frac{2x(x + 1) - (x^2 + 1)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2}.$$

El denominador es positivo y el numerador se anula en $x = -1 \pm \sqrt{2}$. En el intervalo $x > 0$ solo pertenece $x_0 = \sqrt{2} - 1$. El numerador es negativo en $(0, x_0)$ y positivo en (x_0, ∞) ; así, f decrece antes de x_0 y crece después. Como la función es par, sus intervalos se reflejan simétricamente para $x < 0$.

En $x = 0$ no usamos la derivada de una única expresión. Para $0 < |x| < 1$,

$$f(x) - f(0) = \frac{x^2 + 1}{|x| + 1} - 1 = \frac{|x|(|x| - 1)}{|x| + 1} < 0,$$

de modo que $x = 0$ es un máximo relativo. En $x = \pm x_0$ se alcanzan mínimos relativos. Su valor es

$$f(x_0) = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2 + 1}{\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2} - 1).$$

Conclusión. f es par; tiene un máximo relativo en $(0, 1)$ y mínimos relativos en $(\pm(\sqrt{2} - 1), 2(\sqrt{2} - 1))$.

b) Integral en $[-1, 0]$

En este intervalo $|x| = -x$, por lo que

$$\frac{x^2 + 1}{|x| + 1} = \frac{x^2 + 1}{1 - x} = -x - 1 + \frac{2}{1 - x}.$$

Integramos término a término y aplicamos la regla de Barrow:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f(x) dx &= \left[-\frac{x^2}{2} - x - 2 \ln(1 - x) \right]_{-1}^0 \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{2} + 1 - 2 \ln 2 \right) = 2 \ln 2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusión. El valor exacto de la integral es $2 \ln 2 - \frac{1}{2}$.

Pregunta 3 - Probabilidad y distribución normal

La probabilidad de que una aceituna no tenga escudete es $1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$. Supondremos independientes los estados de las 12 aceitunas de una bolsa.

a) Bolsa sin aceitunas enfermas

Sea X el número de aceitunas enfermas de una bolsa. Entonces $X \sim \text{Binomial}(12, \frac{1}{20})$. La bolsa no tiene aceitunas enfermas cuando $X = 0$; por independencia,

$$P(X = 0) = \binom{12}{0} \left(\frac{1}{20}\right)^0 \left(\frac{19}{20}\right)^{12} = \left(\frac{19}{20}\right)^{12} \approx 0,5404.$$

Conclusión. La probabilidad de que una bolsa no tenga aceitunas enfermas es aproximadamente 0,5404.

b) Al menos el 60 % de las bolsas contiene alguna aceituna enferma

Una bolsa contiene alguna aceituna enferma con probabilidad

$$q = 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^{12} \approx 0,45964.$$

Sea Y el número de bolsas afectadas entre las 100 distribuidas. Suponiendo independencia entre bolsas, $Y \sim \text{Binomial}(100, q)$. Como $nq \approx 45,96$ y $n(1 - q) \approx 54,04$, la aproximamos mediante una normal de media y desviación típica

$$\mu = nq \approx 45,964, \quad \sigma = \sqrt{nq(1 - q)} \approx 4,984.$$

El 60 % de 100 son 60 bolsas, así que se pide $P(Y \geq 60)$. Al aproximar una variable discreta con una continua, aplicamos la corrección de continuidad: usamos el límite 59,5.

$$\begin{aligned} P(Y \geq 60) &\approx P\left(Z \geq \frac{59,5 - 45,964}{4,984}\right) \\ &= P(Z \geq 2,72) = 1 - \Phi(2,72) \\ &= 1 - 0,9967 = 0,0033. \end{aligned}$$

Conclusión. La probabilidad aproximada es 0,0033, es decir, un 0,33 %.

Pregunta 4 - Matrices y sistemas

4.1 a) Matriz AA^T diagonal

Las filas de A son $(2a, -2)$ y $(a, 1)$. La matriz AA^T contiene sus productos escalares, por lo que será diagonal exactamente cuando esas dos filas sean perpendiculares:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 4a^2 + 4 & 2a^2 - 2 \\ 2a^2 - 2 & a^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

La condición es $2a^2 - 2 = 0$, es decir, $a^2 = 1$. **Conclusión.** Los valores buscados son $a = 1$ y $a = -1$.

4.1 b) Igualdad de productos matriciales

Como el producto de matrices no es conmutativo, desarrollamos el miembro izquierdo respetando el orden:

$$(A - B)(A + B) = A^2 + AB - BA - B^2.$$

Para que sea igual a $A^2 - B^2$ debe cumplirse $AB = BA$. Calculamos ambos productos:

$$AB = \begin{pmatrix} 2a + 2 & 4a - 4 \\ a - 1 & 2a + 2 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Igualando, por ejemplo, la entrada de la primera fila y segunda columna, $4a - 4 = 0$, de donde $a = 1$. Al sustituirlo, las cuatro entradas coinciden, así que satisface la condición. **Conclusión.** La igualdad se cumple únicamente para $a = 1$.

4.2 a) Discusión del sistema según λ

Escribimos la matriz de coeficientes A_λ y la ampliada A_λ^* :

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A_\lambda^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & 1 & 7 \\ 1 & 2 & \lambda & 2 \end{array} \right).$$

Aplicando $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$ y $F_3 \leftarrow F_3 - F_1$ a la matriz ampliada, obtenemos

$$A_\lambda^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \lambda - 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 & 0 \end{array} \right).$$

De aquí, $\det A_\lambda = (\lambda - 4)(\lambda + 1)$. Estudiamos sus ceros y comparamos rangos:

- Si $\lambda \neq 4, -1$, el determinante no es nulo; por tanto, $\text{rg}(A_\lambda) = \text{rg}(A_\lambda^*) = 3$, igual al número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (SCD).
- Si $\lambda = -1$, la última fila se anula y las dos primeras filas son independientes: $\text{rg}(A_{-1}) = \text{rg}(A_{-1}^*) = 2 < 3$. El sistema es compatible indeterminado (SCI).
- Si $\lambda = 4$, las filas segunda y tercera tienen coeficientes proporcionales con razón $3/5$, pero los términos independientes no guardan esa proporción: $3 \neq \frac{3}{5} \cdot 0$. Así, $\text{rg}(A_4) = 2$ y $\text{rg}(A_4^*) = 3$. El sistema es incompatible (SI).

Conclusión. Es SCD si $\lambda \notin \{-1, 4\}$, SCI si $\lambda = -1$ y SI si $\lambda = 4$.

4.2 b) Resolución para $\lambda = -1$

Con $\lambda = -1$, la reducción anterior da $x + 2y - z = 2$ y $-5y + 3z = 3$. Tomamos $z = -5t$ como parámetro; entonces

$$y = -\frac{3}{5} - 3t, \quad x = 2 - 2y + z = \frac{16}{5} + t.$$

Conclusión. El conjunto de soluciones es $(x, y, z) = \left(\frac{16}{5}, -\frac{3}{5}, 0\right) + t(1, -3, -5)$, $t \in \mathbb{R}$.

Pregunta 5 - Teorema de Bolzano y continuidad

5.1 a) Valores de a y b para aplicar Bolzano

Cada tramo de la función es continuo en su intervalo. Para que la función completa sea continua en $[0, 2\pi]$, comprobamos los dos puntos de unión. En $x = \pi/2$, igualamos el límite por la izquierda con el valor del segundo tramo:

$$\frac{1}{2}(-8 + \cos(\pi/2)) = a \sin(\pi/2) + 4 \implies -4 = a + 4 \implies a = -8.$$

En $x = \pi$:

$$a \sin \pi + 4 = 2 \sin(2\pi) + b \implies 4 = b.$$

Con estos valores, f es continua en todo el intervalo. Además,

$$f(0) = \frac{1}{2}(-8 + 1) = -\frac{7}{2} < 0, \quad f(2\pi) = 2 \sin(4\pi) + 4 = 4 > 0.$$

Se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano: existe al menos una raíz en $(0, 2\pi)$. **Conclusión.** Los valores son $a = -8$ y $b = 4$.

5.1 b) Unicidad y cálculo de la raíz

Con $a = -8$ y $b = 4$, el primer tramo es siempre negativo, pues $\cos x \leq 1$ y $\frac{1}{2}(-8 + \cos x) \leq -\frac{7}{2}$. El tercer tramo es siempre positivo, ya que $2 \sin(2x) + 4 \geq 2$. Por tanto, cualquier raíz debe estar en el tramo central, donde

$$-8 \sin x + 4 = 0 \iff \sin x = \frac{1}{2}.$$

En $[\pi/2, \pi)$ el seno decrece de 1 a 0, así que toma el valor $1/2$ una sola vez, en $x = 5\pi/6$. **Conclusión.** La función tiene una única raíz en $(0, 2\pi)$, que es $\frac{5\pi}{6}$.

5.2 a) Continuidad en todo $\mathbb{R}$

Para $x \neq 0$, la función $\ln(x^2 + 1)/x$ es cociente de funciones continuas con denominador no nulo. En $x = 0$ usamos el límite notable $\lim_{u \rightarrow 0} \ln(1 + u)/u = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2} = 0 = f(0).$$

Conclusión. f es continua en $x = 0$ y, por tanto, en todo $\mathbb{R}$.

5.2 b) Derivabilidad y recta tangente en el origen

Aplicamos la definición de derivada en 0:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + h^2)}{h^2} = 1.$$

La recta tangente en $x = 0$ pasa por $(0, f(0)) = (0, 0)$ y tiene pendiente $f'(0) = 1$. Usando $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, **Conclusión.** La función es derivable en 0 y su recta tangente es $y = x$.