

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de junio de 2018

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Discusión de un sistema con parámetro

Escribimos la matriz de coeficientes y la ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -(m+1) & 1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 0 & 1 \\ -2 & -(m+1) & 1 & -1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 & 2+2m \end{array} \right).$$

El determinante identifica los valores críticos del parámetro:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -(m+1) & 1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 \end{vmatrix} = m^2 - 1 = (m-1)(m+1).$$

Si $m \neq \pm 1$, el determinante es no nulo y $\text{rg}(A) = 3$. La matriz ampliada tiene también rango 3; como ambos rangos coinciden con el número de incógnitas, Rouché-Frobenius clasifica el sistema como compatible determinado.

Si $m = 1$, el determinante se anula. Las dos primeras filas son independientes y la tercera es su combinación $F_3 = 7F_1 + 3F_2$, también en los términos independientes. Por ello, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$, y el sistema es compatible indeterminado. En efecto, sus ecuaciones dan $x + y = 1$, $z = 1$ y la tercera repite la primera. Tomando $y = t$,

$$(x, y, z) = (1 - t, t, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si $m = -1$, el determinante vuelve a ser cero. El menor de A formado por las filas primera y segunda y las columnas primera y tercera vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

de modo que $\text{rg}(A) = 2$. En la ampliada, el menor de orden tres de las columnas primera, segunda y de términos independientes es

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

por lo que $\text{rg}(A^*) = 3$. Los rangos difieren y, por Rouché-Frobenius, el sistema es incompatible. **Conclusión.** El sistema es SCD si $m \neq \pm 1$, SCI si $m = 1$ y SI si $m = -1$.

b) Solución para $m = 0$

Sustituyendo $m = 0$,

$$\begin{cases} x = 1, \\ -2x - y + z = -1, \\ x - y + 2z = 2. \end{cases}$$

La primera ecuación da $x = 1$. Las otras dos se reducen a $-y + z = 1$ y $-y + 2z = 1$. Al restarlas resulta $z = 0$ y, por tanto, $y = -1$. **Conclusión.** Para $m = 0$, la solución es $(x, y, z) = (1, -1, 0)$.

Opción A - Ejercicio 2. Mínimo de errores e integral

a) Valor que minimiza la suma de errores cuadrados

La función que hay que minimizar es $E(x) = \sum_{i=1}^5 (x - m_i)^2$. Como es una suma de cuadrados, buscamos los puntos críticos y comprobamos que corresponden a un mínimo:

$$E'(x) = 2 \sum_{i=1}^5 (x - m_i) = 0 \implies 5x = \sum_{i=1}^5 m_i.$$

La segunda derivada es $E''(x) = 10 > 0$, así que el punto crítico es un mínimo. Sustituyendo las cinco medidas,

$$x = \frac{0,92 + 0,94 + 0,89 + 0,90 + 0,91}{5} = \frac{4,56}{5} = 0,912.$$

Conclusión. El valor que minimiza la suma de los cuadrados de los errores es $x = 0,912$.

b) Integral por partes

Aplicamos integración por partes, tomando $u = \ln x$ y $dv = x^2 dx$; entonces $du = \frac{1}{x} dx$ y $v = \frac{x^3}{3}$:

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Evaluamos en los extremos indicados:

$$\int_1^2 x^2 \ln x dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \right]_1^2 = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}.$$

Conclusión. La integral vale $\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}$.

Opción A - Ejercicio 3. Planos y cuadrado en el espacio

a) Volumen del cubo

Los vectores normales de los planos son $\vec{n}_1 = (4, 6, -12)$ y $\vec{n}_2 = (-2, -3, 6) = -\frac{1}{2}\vec{n}_1$, por lo que los planos son paralelos. Para medir su separación escribimos ambos con el mismo vector normal:

$$\pi_1 : 4x + 6y - 12z + 1 = 0, \quad \pi_2 : 4x + 6y - 12z + 10 = 0,$$

donde en la segunda ecuación se ha multiplicado por -2 . La distancia entre planos paralelos $ax + by + cz + d_1 = 0$ y $ax + by + cz + d_2 = 0$ es $\frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Esta distancia es la arista del cubo:

$$\ell = \frac{|10 - 1|}{\sqrt{4^2 + 6^2 + (-12)^2}} = \frac{9}{14}, \quad V = \ell^3 = \left(\frac{9}{14}\right)^3 = \frac{729}{2744}.$$

Conclusión. El volumen del cubo es $\frac{729}{2744}$ unidades cúbicas.

b) Vértices C y D del cuadrado

Como C pertenece a π_2 y π_3 , primero hallamos la recta de intersección. Sus vectores normales son $\vec{n}_2 = (-2, -3, 6)$ y $\vec{n}_3 = (1, -1, 1)$, así que un vector director es

$$\vec{d} = \vec{n}_2 \times \vec{n}_3 = (3, 8, 5).$$

El punto $C_0 = (2, 3, 3)$ satisface ambos planos; por tanto, la intersección se expresa paramétricamente como

$$C = C_0 + t\vec{d} = (2 + 3t, 3 + 8t, 3 + 5t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

En un cuadrado, $\overrightarrow{BC}$ es perpendicular e igual en longitud a $\overrightarrow{AB}$. Calculamos

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1 - 2, 2 - 1, 3 - 3) = (-1, 1, 0),$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (1 + 3t, 1 + 8t, 5t).$$

La perpendicularidad exige

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -(1 + 3t) + (1 + 8t) = 5t = 0,$$

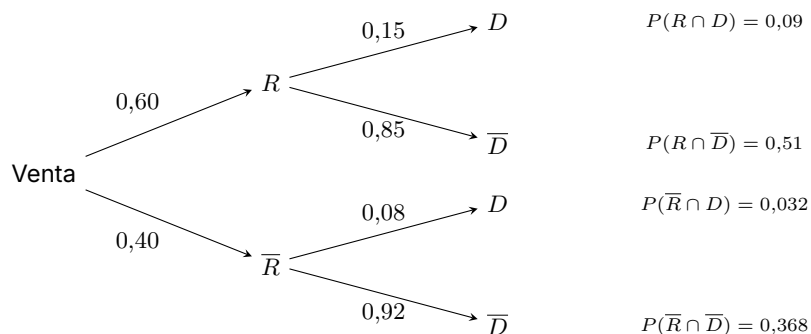
de donde $t = 0$ y $C = (2, 3, 3)$. Así, $\overrightarrow{BC} = (1, 1, 0)$, que tiene la misma longitud $\sqrt{2}$ que $\overrightarrow{AB}$. En un paralelogramo, $D = A + C - B$:

$$D = (2, 1, 3) + (2, 3, 3) - (1, 2, 3) = (3, 2, 3).$$

Conclusión. Los vértices son $C = (2, 3, 3)$ y $D = (3, 2, 3)$.

Opción A - Ejercicio 4. Probabilidad de devolución

Sea R el suceso «artículo rebajado» y D el suceso «artículo devuelto». Los datos son $P(R) = 0,60$, $P(\bar{R}) = 0,40$, $P(D | R) = 0,15$ y $P(D | \bar{R}) = 0,08$. En los caminos sucesivos multiplicamos las probabilidades y sumamos caminos incompatibles que llevan al mismo suceso:



a) Porcentaje global de artículos devueltos

Por la probabilidad total, sumamos los dos caminos que terminan en devolución:

$$P(D) = P(D | R)P(R) + P(D | \bar{R})P(\bar{R}) = 0,15 \cdot 0,60 + 0,08 \cdot 0,40 = 0,122.$$

Conclusión. Se devuelve el 12,2 % de los artículos.

b) Porcentaje de artículos devueltos que estaban rebajados

Aplicamos Bayes para invertir la condición, pues conocemos que el artículo fue devuelto y preguntamos si tenía descuento:

$$P(R | D) = \frac{P(D | R)P(R)}{P(D)} = \frac{0,15 \cdot 0,60}{0,122} = \frac{45}{61} \approx 0,7377.$$

Conclusión. El 73,77 % de los artículos devueltos se había adquirido con descuento.

Opción B - Ejercicio 1. Sistema de días y costes

Sean F , G y S los días en Francia, Alemania y Suiza. El total de días y el dato sobre Francia y Suiza dan

$$F + G + S = 15, \quad F = 2S.$$

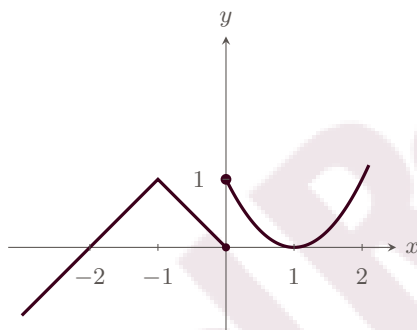
Por día, cada estudiante pagó $20 + 20 + 8 = 48$ euros en Francia, $25 + 15 + 8 = 48$ en Alemania y $30 + 25 + 8 = 63$ en Suiza. El coste total establece la tercera ecuación:

$$48F + 48G + 63S = 765.$$

Restando 48 veces la ecuación de días, obtenemos $15S = 765 - 48 \cdot 15 = 45$, luego $S = 3$. Así, $F = 6$ y $G = 15 - 6 - 3 = 6$. La comprobación es $48 \cdot 6 + 48 \cdot 6 + 63 \cdot 3 = 765$. **Conclusión.** Estuvieron 6 días en Francia, 6 en Alemania y 3 en Suiza.

Opción B - Ejercicio 2. Función definida por una gráfica

De la figura se leen los puntos y tramos siguientes: a la izquierda hay dos segmentos que pasan por $(-2, 0)$, $(-1, 1)$ y $(0, 0)$; a la derecha aparece la parábola $y = (x - 1)^2$ para $x > 0$, con círculo abierto en $(0, 1)$ y vértice en $(1, 0)$. Dibujamos un esquema con esas características:



a) Valores de $f(-1)$ y $f'(1)$

La ordenada del punto de abscisa -1 es 1, así que $f(-1) = 1$. La parábola tiene un mínimo en $(1, 0)$ y una tangente horizontal en su vértice; por tanto, $f'(1) = 0$. **Conclusión.** $f(-1) = 1$ y $f'(1) = 0$.

b) Continuidad en $x = -1$ y $x = 0$

En $x = -1$ ambos segmentos se acercan a la ordenada 1, que coincide con el valor de la función:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1).$$

Luego f es continua en -1 . En $x = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \quad f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

Los límites laterales no coinciden, de modo que f no es continua en 0. **Conclusión.** f es continua en -1 , pero no en 0.

c) Derivabilidad en $x = -1$ y $x = 0$

En $x = -1$ las pendientes laterales de los segmentos son distintas: 1 por la izquierda y -1 por la derecha; así, no existe derivada. En $x = 0$ la función no es continua, y la derivabilidad exigiría continuidad, por lo que tampoco es derivable. **Conclusión.** f no es derivable en -1 ni en 0.

d) Integral entre -2 y 0

La gráfica queda por encima del eje x en el intervalo. Separamos en $x = -1$, donde cambia la pendiente:

$$\int_{-2}^0 f(x) dx = \int_{-2}^{-1} (x + 2) dx + \int_{-1}^0 (-x) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Son las áreas de dos triángulos de base y altura 1. **Conclusión.** La integral vale 1.

Opción B - Ejercicio 3. Distancia y posición relativa de rectas

La recta r es la intersección de los planos $2x + y = 2$ y $5x + z = 6$. Tomando $x = t$,

$$r: \quad x = t, \quad y = 2 - 2t, \quad z = 6 - 5t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La recta s se escribe paramétricamente usando el parámetro común de sus cocientes:

$$s: \quad x = 2 - u, \quad y = -1 + u, \quad z = 1 + \frac{u}{3}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

a) Distancia de $P = (1, 1, 1)$ a r

Para la distancia de un punto P a una recta de vector director $\vec{d}$ y punto R_0 usamos

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{R_0P} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}.$$

Aquí $R_0 = (0, 2, 6)$, $\vec{d} = (1, -2, -5)$ y $\overrightarrow{R_0P} = (1, -1, -5)$. Por tanto,

$$\overrightarrow{R_0P} \times \vec{d} = (-5, 0, -1), \quad \|\overrightarrow{R_0P} \times \vec{d}\| = \sqrt{26}, \quad \|\vec{d}\| = \sqrt{30}.$$

Así,

$$d(P, r) = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{13}{15}}.$$

Conclusión. La distancia de P a r es $\sqrt{\frac{13}{15}}$.

b) Posición relativa de r y s

Sus vectores directores son $\vec{d}_r = (1, -2, -5)$ y $\vec{d}_s = (-3, 3, 1)$, que no son proporcionales. Si se cortaran, las coordenadas deberían coincidir para algún par de parámetros. Igualando las coordenadas x e y :

$$t = 2 - u, \quad 2 - 2t = -1 + u \implies t = 1, \quad u = 1.$$

Con esos valores, la coordenada z de r es 1, mientras que la de s es $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. No existe, pues, un punto de intersección. Al no ser paralelas ni secantes, son alabeadas. **Conclusión.** r y s son rectas alabeadas.

c) Plano perpendicular a s que pasa por P

Un plano perpendicular a una recta tiene como vector normal un vector director de ella. Usamos $\vec{d}_s = (-3, 3, 1)$ y el punto $P = (1, 1, 1)$:

$$-3(x - 1) + 3(y - 1) + (z - 1) = 0 \implies 3x - 3y - z + 1 = 0.$$

Conclusión. El plano pedido es $3x - 3y - z + 1 = 0$.

Opción B - Ejercicio 4. Defectos y aproximación normal

a) Número esperado de productos defectuosos

La probabilidad de defecto se obtiene sumando los dos casos incompatibles (producto A o producto B):

$$p = 0,75 \cdot 0,025 + 0,25 \cdot 0,05 = 0,03125.$$

El número esperado entre 5000 unidades es

$$5000p = 5000 \cdot 0,03125 = 156,25.$$

Conclusión. Se esperan 156,25 productos defectuosos, es decir, aproximadamente 156 productos.

b) Probabilidad de más de 160 defectuosos con producción A

Cada producto A es defectuoso con probabilidad $p = 0,025$ y consideramos las unidades ensayos independientes. Así, $X \sim \text{Bin}(6000, 0,025)$. Para aproximar esta distribución por una normal, calculamos su media y desviación típica

$$\mu = np = 150, \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{146,25} \approx 12,09.$$

Como $np = 150$ y $n(1-p) = 5850$ son grandes, la aproximación es adecuada. Aplicamos corrección de continuidad: «más de 160» significa $X \geq 161$, que aproximamos por $Y > 160,5$ para $Y \sim N(150, 12,09)$. Al tipificar,

$$z = \frac{160,5 - 150}{12,09} \approx 0,87.$$

La tabla da $\Phi(0,87) = 0,8078$. Por tanto,

$$P(X > 160) \approx P(Y > 160,5) = 1 - \Phi(0,87) = 1 - 0,8078 = 0,1922.$$

Conclusión. La probabilidad aproximada de obtener más de 160 productos defectuosos es 0,1922 (un 19,22 %).