

Modelo 1 de 2006

Derivadas, áreas, vectores y discusión de sistemas.

Opción A - Ejercicio 1

El dominio de $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ es $\mathbb{R}$, pues $x^2 + 1 > 0$. Su derivada es

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

El denominador es positivo: f decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$. Tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$. Para hallar la inflexión de abscisa negativa, calculamos

$$f''(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}.$$

El punto negativo donde cambia de signo es $x = -1$, con $f(-1) = \ln 2$. La pendiente de la tangente es $f'(-1) = -1$, luego

$$\boxed{y - \ln 2 = -(x + 1)}.$$

Opción A - Ejercicio 2

En $x = 0$, los dos tramos valen 0. Las derivadas laterales también coinciden:

$$f'_+(0) = e^0 = 1, \quad f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{xe^{-x^2}}{x} = 1.$$

Por tanto f es derivable en 0 y $f'(0) = 1$. En $[-1, 0]$, $xe^{-x^2} \leq 0$, de modo que el área con el eje es

$$S = - \int_{-1}^0 xe^{-x^2} dx = - \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2} \right]_{-1}^0 = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \right].$$

Opción A - Ejercicio 3

Los vectores son independientes si el determinante que forman es distinto de cero:

$$\det \begin{pmatrix} x & x & 2 \\ 2 & -2 & -x \\ 0 & 1 & -4x \end{pmatrix} = 17x^2 + 4 > 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Así que son linealmente independientes para todo valor real. Para que sean ortogonales dos a dos, comprobamos los tres productos escalares:

$$u \cdot v = x^2 - 4, \quad u \cdot w = 0, \quad v \cdot w = 0.$$

Solo se necesita imponer $u \cdot v = 0$, de donde $\boxed{x = \pm 2}$. Opción A - Ejercicio 4

Escribimos ambas rectas en forma paramétrica:

$$r : (x, y, z) = (a, 1, 4) + t(1, -2, -1), \quad s : (x, y, z) = (1, -2, 0) + u(2, 1, 3).$$

En la intersección, las coordenadas y, z cumplen $1 - 2t = -2 + u$ y $4 - t = 3u$. Resolviendo, $t = u = 1$. La coordenada x exige $a + 1 = 3$, así que $\boxed{a = 2}$ y el punto de corte es $\boxed{(3, -1, 3)}$.

Opción B - Ejercicio 1

Usamos desarrollos en torno a $x = 1$. Si $h = x - 1$, entonces $\ln x = h - h^2/2 + o(h^2)$ y

$$\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{2} + o(1).$$

Al restar $1/(x-1) = 1/h$, los términos divergentes se cancelan. Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{2}.$$

Opción B - Ejercicio 2

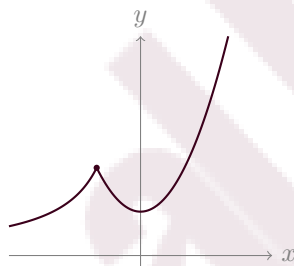
La continuidad en $x = -1$ exige que $-a/(-1) = a$ coincida con $(-1)^2 + 1 = 2$, así que $a = 2$. La función queda

$$f(x) = \begin{cases} -2/x, & x \leq -1, \\ x^2 + 1, & x > -1. \end{cases}$$

En $[-2, -1]$ el primer tramo es positivo, y en $[-1, 2]$ el segundo también. El área es

$$S = \int_{-2}^{-1} \frac{-2}{x} dx + \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx = 2 \ln 2 + 6 = \boxed{6 + 2 \ln 2}.$$

El esbozo muestra una rama decreciente positiva a la izquierda de -1 , las dos ramas se unen continuamente en $(-1, 2)$ y una parábola con vértice $(0, 1)$ a la derecha.



Opción B - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad \det A = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Para $\lambda \neq -1, 0, 1$, $\det A \neq 0$ y el sistema es SCD. Si $\lambda = 0$, las ecuaciones implican $y - z = 1$, $x + z = 0$ e $x + y = 0$, que llevan a la contradicción $0 = 1$; así, $\text{rg } A = 2$ y $\text{rg } A^* = 3$, luego es SI. Para $\lambda = 1$, un menor de A vale $2 \neq 0$ y $\det A = 0$, de modo que $\text{rg } A = 2$. Las ecuaciones segunda y tercera coinciden, así que $\text{rg } A^* = 2 < 3$ y el sistema es SCI: $(x, y, z) = (1 - t, t, 0)$. Para $\lambda = -1$, un menor de A vale $-2 \neq 0$ y el determinante es cero; la segunda ecuación es la opuesta de la primera, también en el término independiente, por lo que $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2 < 3$. Es SCI y sus soluciones son $(0, 1 + t, t)$. Para $\lambda = 2$, el determinante no se anula y la solución única es

$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right).$$

Opción B - Ejercicio 4

Parametrizamos r como $A(t) = t(1, 1, 1)$ y s como $B(u) = (u, -u, 2u - 1)$. El segmento de mínima longitud entre las rectas es perpendicular a las dos direcciones, así que

$$(B - A) \cdot (1, 1, 1) = 0, \quad (B - A) \cdot (1, -1, 2) = 0.$$

Estas condiciones dan $2u - 3t - 1 = 0$ y $3u - t - 1 = 0$, de donde $u = 2/7$ y $t = -1/7$. Los puntos son

$$A = \left(-\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{1}{7} \right), \quad B = \left(\frac{2}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{3}{7} \right).$$