

CATALUÑA · PAU 2011 · ORDINARIA

Matemáticas CCSS

12 ejercicios

Instrucciones del examen

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué es lo que quiere hacer y por qué. Cada cuestión vale 2 puntos. Puede utilizar calculadora, pero no se pueden usar calculadoras u otros aparatos que lleven información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

OPCIÓN A 2 puntos

Una empresa compra tres inmuebles por un valor total de 2 millones de euros. Al venderlos, espera obtener unas ganancias del 20%, del 50% y del 25%, respectivamente, que le reportarán unos beneficios totales de 600 000 euros. En el momento de ponerlos a la venta, sin embargo, consigue unas ganancias del 80%, del 90% y del 85%, respectivamente, lo que le reporta unos beneficios totales de 1,7 millones de euros. ¿Cuánto había pagado por cada inmueble?

Ejercicio 1

OPCIÓN B 2 puntos

Considere la función $f(x) = x - \ln(x)$.

a) 1 punto

Indique su dominio. Determine la asíntota vertical de la función f .

b) 1 punto

Determine los intervalos en los que la función f es creciente y los intervalos en los que es decreciente, y clasifique sus posibles extremos.

Ejercicio 2

OPCIÓN A 2 puntos

Considere la región sombreada de la figura siguiente:

a) 1 punto

Determine el sistema de inecuaciones que la delimita.

b) 1 punto

Calcule el valor máximo de la función $z = x + 2y$ en esta región, e indique para qué valores se alcanza este máximo.

Ejercicio 2

OPCIÓN B 2 puntos

Considere la región del plano limitada por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $2x - 3y = -6$, $x + 3y = 15$ y $x = 6$.

a) 1,5 puntos

Dibújela, calcule sus vértices y justifique si los puntos $P(1, 3)$ y $Q(3, 3)$ pertenecen o no a esta región.

b) 0,5 puntos

Calcule en qué puntos de esta región la función $f(x, y) = x + 4y$ alcanza el valor máximo y el valor mínimo, e indique estos valores.

Ejercicio 3

OPCIÓN A 2 puntos

Considere la función siguiente:

$$f(x) = \frac{2x^2}{ax + 1}$$

a) 1 punto

Determine el valor de a que hace que la función f tenga un extremo en el punto $x = 1$, e indique si se trata de un máximo o de un mínimo.

b) 1 punto

Para $a = 3$, indique las asíntotas horizontales y verticales de la función f .

Ejercicio 3

OPCIÓN B 2 puntos

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) 1 punto

Calcule las matrices inversas de A y de B .

b) 1 punto

Determine una matriz X de manera que $A \cdot X \cdot B = C$.

Ejercicio 4

OPCIÓN A 2 puntos

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) 1 punto

Una matriz B , la primera fila de la cual es $(1, 0)$, tiene dos columnas y cumple que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$. Complétela.

b) 1 punto

Haga los cálculos pertinentes para comprobar que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

Ejercicio 4

OPCIÓN B 2 puntos

Considere la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & x < 0 \\ \frac{1}{x-3}, & x \geq 0 \end{cases}$.

a) 1 punto

Haga una representación gráfica aproximada. Justifique para qué valores de x la función es discontinua.

b) 1 punto

Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 4$.

Ejercicio 5

OPCIÓN A 2 puntos

Una empresa que fabrica bicicletas vende la totalidad de la producción. Llamaremos x al número de bicicletas que fabrica mensualmente. Los costes mensuales de producción, en euros, siguen la función $C(x) = 180x + 12000$. La venta de las bicicletas le reporta unos ingresos que siguen la función $I(x) = 500x - \frac{1}{2}x^2$. Los beneficios de la empresa son, lógicamente, la diferencia entre ingresos y costes.

a) 1 punto

¿En qué intervalo hay que situar la producción para no perder dinero?

b) 1 punto

¿Cuántas bicicletas debe producir mensualmente la empresa para obtener el beneficio máximo? En este caso, ¿cuánto gana por cada bicicleta?

Ejercicio 5

OPCIÓN B 2 puntos

Considere el sistema $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -x + 4y - 5z = -8 \end{cases}$.

a) 1,5 puntos

Compruebe que tiene infinitas soluciones. Determinélas.

b) 0,5 puntos

Determine, si es posible, una solución en la que la suma de las tres incógnitas sea 5.

Ejercicio 6

OPCIÓN A 2 puntos

Considere la función $f(x) = x - e^{-3x}$.

a) 1 punto

Indique su dominio, y demuestre que f es estrictamente creciente en todo el dominio.

b) 1 punto

Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Ejercicio 6

OPCIÓN B 2 puntos

Un bosque tiene una masa forestal de $40\,000\text{ m}^3$ de madera. Se calcula que la lluvia ácida y los incendios provocan una disminución del 6% anual de dicha masa forestal, que se puede expresar en términos de la función $F(t) = 40000 \cdot 0,94^t$, en la que $F(t)$ es la masa forestal que queda pasados t años.

a) 1 punto

Justifique que la función F es estrictamente decreciente.

b) 1 punto

¿Dentro de cuántos años la masa forestal se habrá reducido a la mitad?

Tu Profe al Rescate