



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA, CURSO 2021-2022**

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
 - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
 - d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.**
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Calcula a sabiendo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{(\ln x)^3 + 2x} = 1$ (donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano)

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Calcula los vértices y el área del rectángulo de área máxima inscrito en el recinto limitado por la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 12$ y el eje de abscisas, y que tiene su base sobre dicho eje.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula $\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} dx$ (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = \sqrt{1+x} - 1$).

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 2$.

- a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g . Esboza sus gráficas. **(1,25 puntos)**
- b) Determina el área del recinto limitado por las gráficas de f y g en el primer cuadrante. **(1,25 puntos)**



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS
DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA, CURSO 2021-2022**

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

- a) Determina los valores de a para los que la matriz B no tiene inversa. **(0,5 puntos)**
 b) Para $a = 1$ calcula X tal que $AXB = C$, si es posible. **(2 puntos)**

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$.

- a) Calcula: $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix}$ **(1 punto)**
 b) Calcula: $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$ **(1,5 puntos)**

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv x+1 = y-a = -z$ y $s \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$

- a) Calcula a para que r y s se corten. Determina dicho punto de corte. **(1,5 puntos)**
 b) Halla la ecuación del plano que pasa por $P(8, -7, 2)$ y que contiene a la recta s . **(1 punto)**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Sea el plano $\pi \equiv x + y - z = 2$ y la recta $r \equiv x = \frac{y}{3} = z - 1$.

- a) Calcula, si existe, el punto de intersección de π y r . **(0,75 puntos)**
 b) Dado el punto $Q(2, 6, 3)$, halla su simétrico respecto del plano π . **(1,75 puntos)**

SOLUCIONES**BLOQUE A****EJERCICIO 1 (2.5 puntos)**

Calcula a sabiendo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{(\ln x)^3 + 2x} = 1$ (donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano)

Calculamos el valor del límite en función de “ a ”.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{(\ln x)^3 + 2x} &= \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{3(\ln x)^2 \frac{1}{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{\frac{3(\ln x)^2}{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{\frac{3(\ln x)^2 + 2x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{3(\ln x)^2 + 2x} = \frac{\infty}{\infty} = \\ &= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{6(\ln x) \frac{1}{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{\frac{6(\ln x) + 2x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{6(\ln x) + 2x} = \\ &= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{6 \frac{1}{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{\frac{6}{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{\frac{6 + 2x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{6 + 2x} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Grado del numerador} \\ \text{igual que el grado del} \\ \text{denominador} \end{array} \right\} = \boxed{\frac{a}{2}} \end{aligned}$$

Como el límite debe valer 1 tenemos que $\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a = 2}$

El valor de “ a ” que hace cierta la igualdad es $a = 2$.

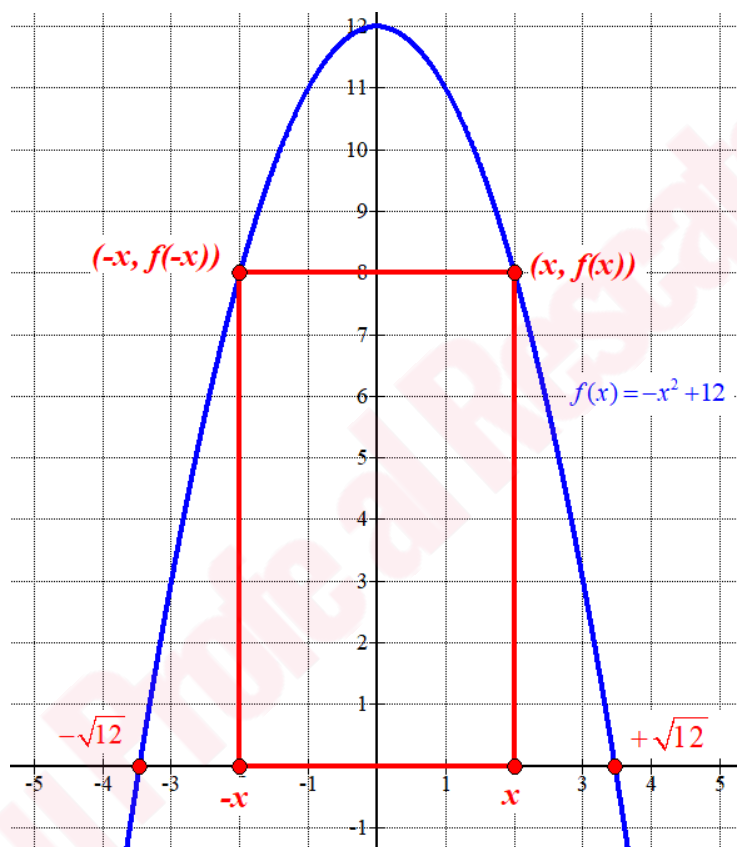
EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Calcula los vértices y el área del rectángulo de área máxima inscrito en el recinto limitado por la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 12$ y el eje de abscisas, y que tiene su base sobre dicho eje.

Veamos cuando corta el eje de abscisas la parábola.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 12 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{12}}$$

Dibujamos la situación planteada.



El área del rectángulo rojo del dibujo es:

$$\text{Área} = \text{base} \cdot \text{altura} = 2x \cdot f(x) = 2x(-x^2 + 12) = -2x^3 + 24x$$

La función que debemos maximizar es $A(x) = -2x^3 + 24x$, $x \in [0, +\sqrt{12}]$

Hallamos su derivada y la igualamos a cero.

$$A(x) = -2x^3 + 24x \Rightarrow A'(x) = -6x^2 + 24$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 24 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = 2$$

Comprobamos si es máximo o mínimo utilizando el signo de la segunda derivada.

$$A'(x) = -6x^2 + 24 \Rightarrow A''(x) = -12x \Rightarrow A''(2) = -12(2) = -24 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa tenemos que en $x = 2$ hay un máximo relativo de la función área.

El área máxima es $A(2) = -2 \cdot 2^3 + 24 \cdot 2 = -16 + 48 = \boxed{32 \text{ u}^2}$

Para $x = 2$ la función vale $f(2) = -2^2 + 12 = 8$. Para $x = -2$ toma el mismo valor $f(-2) = 8$

Las coordenadas de los vértices son: $(-2, 0)$; $(2, 0)$; $(-2, 8)$ y $(2, 8)$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula $\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} dx$ (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = \sqrt{1+x}-1$).

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = \sqrt{1+x}-1 \rightarrow t+1 = \sqrt{1+x} \rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} dx \\ 2\sqrt{1+x} dt = dx \rightarrow 2(1+t) dt = dx \end{array} \right\} = \int \frac{1}{t} 2(1+t) dt = \\ &= 2 \int \frac{1+t}{t} dt = 2 \int \frac{1}{t} dt + 2 \int \frac{t}{t} dt = 2 \ln|t| + 2 \int dt = 2 \ln|t| + 2t = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio} \\ t = \sqrt{1+x}-1 \end{array} \right\} = 2 \ln|\sqrt{1+x}-1| + 2\sqrt{1+x} - 2 + K = 2 \ln|\sqrt{1+x}-1| + 2\sqrt{1+x} + K \end{aligned}$$

Lo aplicamos en el cálculo de la integral definida pedida.

$$\begin{aligned} \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} dx &= \left[2 \ln|\sqrt{1+x}-1| + 2\sqrt{1+x} \right]_3^8 = \\ &= \left[2 \ln|\sqrt{1+8}-1| + 2\sqrt{1+8} \right] - \left[2 \ln|\sqrt{1+3}-1| + 2\sqrt{1+3} \right] = 2 \ln 2 + 6 - 2 \ln 1 - 4 = \boxed{2 + 2 \ln 2} \end{aligned}$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 2$.

- a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g . Esboza sus gráficas. **(1,25 puntos)**
 b) Determina el área del recinto limitado por las gráficas de f y g en el primer cuadrante. **(1,25 puntos)**

a)

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 + 2 = -x^2 + 2x + 2 \Rightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = x \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = x \end{cases} \end{cases}$$

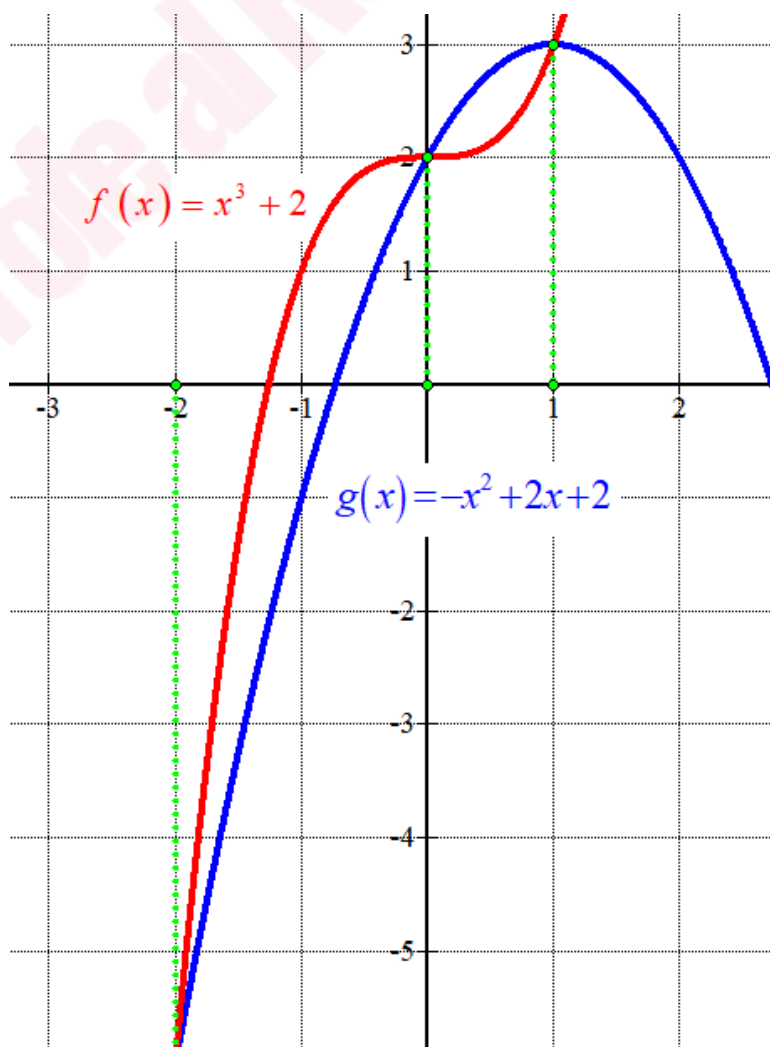
Las gráficas se cortan en $x = -2$, $x = 0$ y $x = 1$.

Como $f(-2) = (-2)^3 + 2 = -6$, $f(0) = 0^3 + 2 = 2$ y $f(1) = 1^3 + 2 = 3$ los puntos de corte tienen coordenadas $(-2, -6)$, $(0, 2)$ y $(1, 3)$

Para dibujar sus gráficas hacemos una tabla de valores.

x	$y = x^3 + 2$
-2	-6
-1	1
0	2
1	3
2	10

x	$y = -x^2 + 2x + 2$
-2	-6
-1	-1
0	2
1	3
2	2

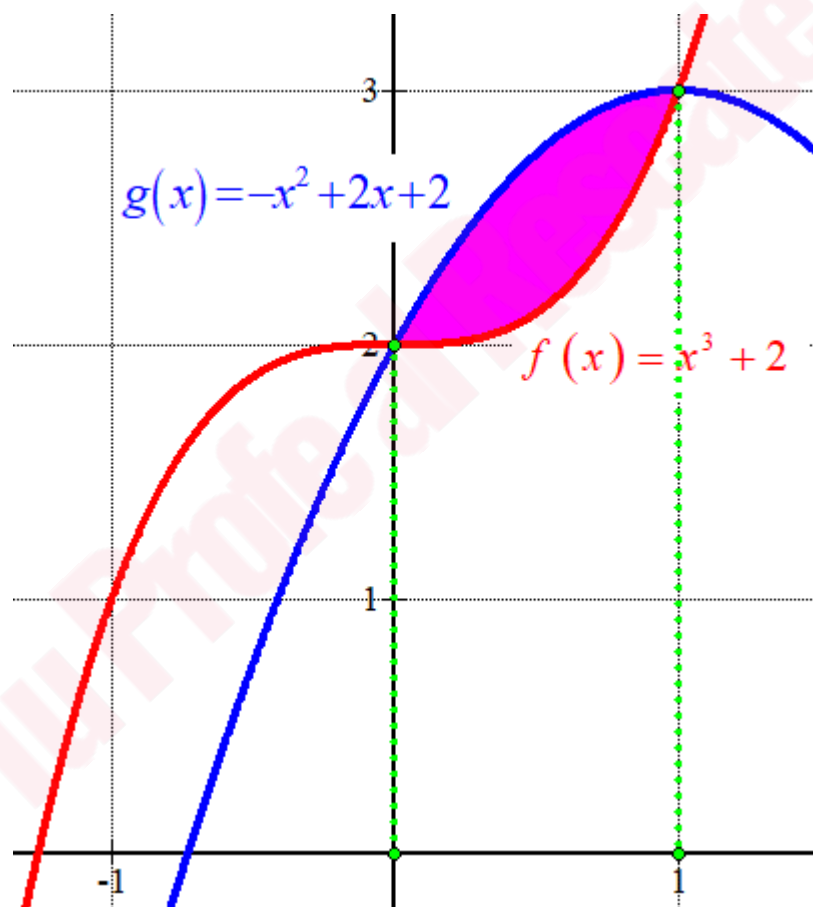


- b) En el primer cuadrante el recinto limitado por las gráficas está situado entre 0 y 1.
El área es la integral definida de la diferencia de las dos funciones entre 0 y 1.

$$\text{Área} = \int_0^1 g(x) - f(x) dx = \int_0^1 -x^2 + 2x + 2 - (x^3 + 2) dx = \int_0^1 -x^2 + 2x - x^3 dx =$$

$$= \int_0^1 -x^3 - x^2 + 2x dx = \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 =$$

$$= \left[-\frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3} + 1^2 \right] - \left[-\frac{0^4}{4} - \frac{0^3}{3} + 0^2 \right] = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \boxed{\frac{5}{12} \approx 0.417 u^2}$$



BLOQUE B**EJERCICIO 5 (2.5 puntos)**

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

- a) Determina los valores de a para los que la matriz B no tiene inversa. **(0,5 puntos)**
 b) Para $a = 1$ calcula X tal que $AXB = C$, si es posible. **(2 puntos)**

- a) Para que no tenga inversa la matriz B su determinante debe ser nulo.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 4a - 2a^2 + 0 - 2 = -2a^2 + 4a$$

$$|B| = 0 \Rightarrow -2a^2 + 4a = 0 \Rightarrow -2a(a - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

La matriz B no tiene inversa cuando $a = 0$ o $a = 2$.

- b) Para $a = 1$ la matriz B tiene inversa y la matriz A también.

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$

Hallamos la matriz inversa de A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallamos la inversa de B .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 4 - 2 - 2 = 2$$

$$B^{-1} = \frac{Adj(B^T)}{|B|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X.

$$\begin{aligned} X = A^{-1}CB^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1-2 & 1 & 1 \\ -2-1-1 & 2+1 & -1/2+1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -6-4 & 2+3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$.

a) Calcula: $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix}$ **(1 punto)**

b) Calcula: $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$ **(1,5 puntos)**

a)

$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Intercambiamos} \\ \text{Columna 2ª y 3ª} \\ \text{El determinante cambia} \\ \text{de signo} \end{array} \right\} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \\ -3p & -3q & -3r \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Sacamos factor común} \\ 2 \text{ en fila } 2^{\text{a}} \text{ y} \\ -3 \text{ en fila } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} = -2(-3) \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Intercambiamos} \\ \text{Fila } 2^{\text{a}} \text{ y } 3^{\text{a}} \\ \text{El determinante cambia} \\ \text{de signo} \end{array} \right\} = -6 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -6 \cdot (-2) = \boxed{12}$$

b)

$$\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{En la columna } 2^{\text{a}} \\ \text{la separamos en dos determinantes} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & a & -2a \\ y & b & -2b \\ z & c & -2c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & -3p & -2a \\ y & -3q & -2b \\ z & -3r & -2c \end{vmatrix} = \{ \text{Sacamos factor común} \} =$$

$$= -2 \begin{vmatrix} x & a & a \\ y & b & b \\ z & c & c \end{vmatrix} + (-3)(-2) \begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{En el primer determinante} \\ \text{la columna 2ª y 3ª son iguales} \\ \text{El determinante vale 0} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{En el segundo determinante} \\ \text{intercambiamos columna 1ª y 3ª} \\ \text{El determinante cambia de signo} \end{array} \right\} =$$

$$= 0 - 6 \begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Trasponemos la matriz del determinante} \\ \text{El determinante no cambia} \end{array} \right\} = -6 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -6(-2) = \boxed{12}$$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv x+1 = y-a = -z$ y $s \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$

- a) Calcula a para que r y s se corten. Determina dicho punto de corte. **(1,5 puntos)**
 b) Halla la ecuación del plano que pasa por $P(8, -7, 2)$ y que contiene a la recta s . **(1 punto)**

a) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las rectas.

$$r \equiv x+1 = y-a = -z \quad s \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \Rightarrow 5 + 2\lambda + 1 = -3 - a = -(2 - \lambda) \Rightarrow 6 + 2\lambda = -3 - a = -2 + \lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6 + 2\lambda = -3 - a \rightarrow a = -9 - 2\lambda \\ 6 + 2\lambda = -2 + \lambda \rightarrow 8 = -\lambda \rightarrow \lambda = -8 \end{cases} \Rightarrow a = -9 - 2(-8) = 7$$

Para que el sistema tenga solución debe ser $a = 7$.

Termino de resolver el sistema con el valor $a = 7$ y determino las coordenadas del punto A de corte de las dos rectas.

$$\lambda = -8 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 + 2(-8) = -11 \\ y = -3 \\ z = 2 - (-8) = 10 \end{cases} \Rightarrow A(-11, -3, 10)$$

- b) El plano que contiene a la recta s tiene como uno de sus vectores directores el director de la recta. El otro vector director es el vector $\overrightarrow{Q_s P}$ que une el punto P y un punto Q_s de la recta s .

$$s \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(5, -3, 2) \\ \vec{v}_s = (2, 0, -1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{Q_s P} = (8, -7, 2) - (5, -3, 2) = (3, -4, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_s = (2, 0, -1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{Q_s P} = (3, -4, 0) \\ P(8, -7, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-8 & y+7 & z-2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3y - 21 - 8z + 16 - 4x + 32 = 0 \Rightarrow -4x - 3y - 8z + 27 = 0 \Rightarrow \pi \equiv 4x + 3y + 8z - 27 = 0$$

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Sea el plano $\pi \equiv x + y - z = 2$ y la recta $r \equiv x = \frac{y}{3} = z - 1$.

a) Calcula, si existe, el punto de intersección de π y r . **(0,75 puntos)**

b) Dado el punto $Q(2, 6, 3)$, halla su simétrico respecto del plano π . **(1,75 puntos)**

a) Planteamos el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano e intentamos resolverlo.

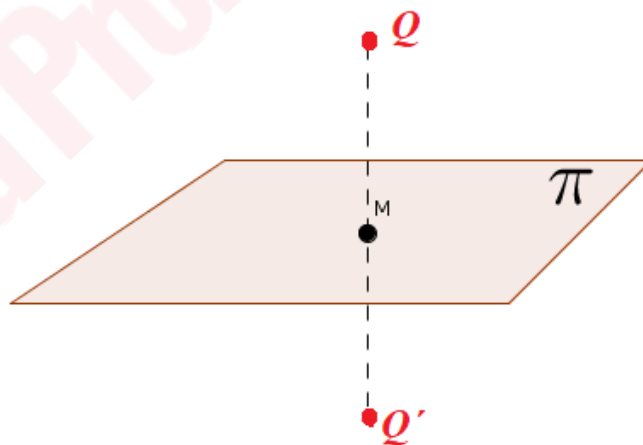
$$r \equiv x = \frac{y}{3} = z - 1 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(0, 0, 1) \\ \vec{v}_r = (1, 3, 1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

$$\pi \equiv x + y - z = 2 \quad \left. \begin{matrix} r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \lambda + 3\lambda - (1 + \lambda) = 2 \Rightarrow \lambda + 3\lambda - 1 - \lambda = 2 \Rightarrow 3\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 1 + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(1, 3, 2)}$$

Recta y plano son secantes y se cortan en el punto $A(1, 3, 2)$.

b) Dibujamos la situación planteada.



Hallamos la recta s perpendicular al plano que pasa por el punto Q .

$$\pi \equiv x + y - z = 2 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, -1)$$

$$\left. \begin{matrix} \vec{v}_s = \vec{n} = (1, 1, -1) \\ Q(2, 6, 3) \in s \end{matrix} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 6 + \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\pi \equiv x + y - z = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 6 + \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + \lambda + 6 + \lambda - (3 - \lambda) = 2 \Rightarrow 2 + \lambda + 6 + \lambda - 3 + \lambda = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\lambda = -3 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 6 - 1 = 5 \\ z = 3 - (-1) = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{M(1, 5, 4)}$$

El punto Q' simétrico de Q respecto del plano π se obtiene sumando al punto M el vector $\overrightarrow{QM}$.

$$\overrightarrow{QM} = (1, 5, 4) - (2, 6, 3) = (-1, -1, 1)$$

$$Q' = M + \overrightarrow{QM} = (1, 5, 4) + (-1, -1, 1) = (0, 4, 5)$$

El punto Q' simétrico de Q respecto del plano π tiene coordenadas Q'(0, 4, 5).