

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria extraordinaria de 2024

Se desarrollan todas las alternativas del examen. En la prueba basta con contestar a las opciones que se elijan.

Pregunta A.1 - Discusión de un sistema

El sistema se puede escribir como $A\vec{x} = \vec{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante para localizar los valores que pueden cambiar el rango:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Si $\lambda \neq 1, 2$, el determinante no es nulo y $\text{rg}(A) = 3$. Por Rouché–Frobenius, el rango de la ampliada también es 3; al coincidir con el número de incógnitas, el sistema es compatible determinado.

Para los valores críticos, examinamos las ecuaciones.

Caso $\lambda = 1$. Las dos primeras ecuaciones coinciden y la tercera aporta una ecuación independiente:

$$y + z = 1, \quad x + z = 0.$$

Así, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$; por Rouché–Frobenius es un sistema compatible indeterminado. Tomando $z = t$,

$$x = -t, \quad y = 1 - t, \quad z = t.$$

Si además $x = 5$, entonces $t = -5$, por lo que $y = 6$ y $z = -5$.

Caso $\lambda = 2$. La segunda y la tercera ecuaciones tienen los mismos coeficientes, pero distintos términos independientes:

$$x + y + z = 2, \quad x + y + z = 0.$$

Por ello, $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A^*) = 3$; los rangos no coinciden y el sistema es incompatible. **Conclusión.** Es SCD si $\lambda \neq 1, 2$, SCI si $\lambda = 1$ y SI si $\lambda = 2$. Para $\lambda = 1$, una solución con $x = 5$ es $(5, 6, -5)$.

Pregunta A.2 - Funciones polinómicas

a) Cuadrática tangente a $y = x$ en el origen

Para que una parábola pase por $(0, 0)$ y tenga allí la misma pendiente que $y = x$, buscamos una cuadrática que cumpla $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Un ejemplo sencillo es

$$f(x) = x + x^2.$$

En efecto, $f(0) = 0$, $f'(x) = 1 + 2x$, luego $f'(0) = 1$; la diferencia $f(x) - x = x^2$ también muestra que ambas gráficas tienen contacto doble en el origen. **Conclusión.** Una función válida es $f(x) = x + x^2$.

b) Máximo relativo en $(1, 1)$

Una cuadrática con máximo debe tener coeficiente principal negativo. Elegimos una parábola con vértice $(1, 1)$:

$$f(x) = 1 - (x - 1)^2 = -x^2 + 2x.$$

Al ser una parábola abierta hacia abajo, su vértice es un máximo relativo (y absoluto). **Conclusión.** Un ejemplo es $f(x) = -x^2 + 2x$.

c) Número de extremos relativos

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, entonces $f'(x) = 2ax + b$, que es una función lineal no constante y se anula en un único punto. Por tanto, la cuadrática tiene como máximo un punto crítico y no puede tener dos extremos relativos distintos. **Conclusión.** Una función polinómica de grado dos no puede tener dos extremos relativos en $\mathbb{R}$.

Pregunta A.3 - Plano mediador y triángulo

a) Plano respecto del cual P y Q son simétricos

El plano de simetría es el plano mediador de PQ : pasa por el punto medio y su vector normal es $\overrightarrow{PQ}$. Calculamos

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2, 1, -1) - (1, -1, 3) = (1, 2, -4), \quad M = \left(\frac{3}{2}, 0, 1\right).$$

La ecuación de un plano con normal $(1, 2, -4)$ que pasa por M es

$$(x - \frac{3}{2}) + 2y - 4(z - 1) = 0.$$

Multiplicando por 2,

$$2x + 4y - 8z + 5 = 0.$$

Conclusión. El plano mediador es $\pi : 2x + 4y - 8z + 5 = 0$.

b) Tercer vértice

La recta r se escribe en forma paramétrica tomando $t = y = z$:

$$r : \quad x = 2 + t, \quad y = t, \quad z = t.$$

Sea $R = (2 + t, t, t)$. El cuadrado de la longitud de PQ es

$$|PQ|^2 = 1^2 + 2^2 + (-4)^2 = 21.$$

La suma de los cuadrados de los otros dos lados debe ser $34 - 21 = 13$. Usamos $P = (1, -1, 3)$ y $Q = (2, 1, -1)$:

$$\overrightarrow{PR} = R - P = (t + 1, t + 1, t - 3), \quad \overrightarrow{QR} = R - Q = (t, t - 1, t + 1).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |PR|^2 + |QR|^2 &= 2(t + 1)^2 + (t - 3)^2 + t^2 + (t - 1)^2 + (t + 1)^2 \\ &= 6t^2 - 2t + 13. \end{aligned}$$

Igualemos esta expresión a 13:

$$6t^2 - 2t + 13 = 13 \implies 2t(3t - 1) = 0.$$

Se obtienen $t = 0$ o $t = \frac{1}{3}$. El primero da $R = (2, 0, 0)$, que tiene coordenadas nulas y queda descartado. Para $t = \frac{1}{3}$, todas las coordenadas son no nulas:

$$R = \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Conclusión. El tercer vértice es $R = (\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Pregunta A.4 - Probabilidad condicionada

El enunciado define $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$. Como A_1 y A_2 son incompatibles y cada uno tiene probabilidad 0,4, estos sucesos y A_3 forman una partición con probabilidades 0,4, 0,4 y 0,2.

a) Probabilidad de B

La probabilidad total se obtiene sumando las probabilidades de B en cada parte de la partición:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B | A_1)P(A_1) + P(B | A_2)P(A_2) + P(B | A_3)P(A_3) \\ &= 0,25 \cdot 0,4 + 0,25 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,2 \\ &= 0,3. \end{aligned}$$

Conclusión. $P(B) = 0,3$.

b) Probabilidad de C e independencia con A_2

Sea $p = P(C)$. Como C es independiente de A_1 , $P(C | A_1) = p$. Aplicando la probabilidad total a la misma partición,

$$\begin{aligned} p &= P(C | A_1)P(A_1) + P(C | A_2)P(A_2) + P(C | A_3)P(A_3) \\ &= 0,4p + 0,3 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,2. \end{aligned}$$

Así, $0,6p = 0,24$, luego $P(C) = 0,4$. Para que C y A_2 sean independientes se necesitaría $P(C \cap A_2) = P(C)P(A_2)$. Pero

$$P(C \cap A_2) = P(C | A_2)P(A_2) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12, \quad P(C)P(A_2) = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16.$$

Conclusión. $P(C) = 0,4$ y C no es independiente de A_2 .

Pregunta B.1 - Determinantes y sistemas

a) Identidad de determinantes

Usamos que el determinante de un producto es el producto de los determinantes y que $\det(M^2) = (\det M)^2$. Por la hipótesis,

$$\begin{aligned}\det((A+B)^2) &= (\det(A+B))^2 \\ &= (\det A + \det B)^2 \\ &= (\det A)^2 + (\det B)^2 + 2 \det A \det B \\ &= \det(A^2) + \det(B^2) + 2 \det(AB).\end{aligned}$$

Esto prueba la igualdad solicitada.

b) Valor de α

Sumamos las matrices elemento a elemento:

$$C + D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha + 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & \alpha + 1 \end{pmatrix}.$$

Desarrollando el determinante por la primera fila,

$$\det(C + D) = 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \alpha + 1 \end{vmatrix} = 4\alpha.$$

Para las matrices por separado,

$$\det C = 2\alpha + 2, \quad \det D = 2.$$

La igualdad pedida equivale a

$$4\alpha = (2\alpha + 2) + 2 \implies \alpha = 2.$$

Conclusión. El único valor es $\alpha = 2$.

c) Sistema homogéneo para $\alpha = -1$

La matriz de coeficientes queda

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

El sistema $C(x, y, z)^T = 0$ da $x - z = 0$ y $-x + y = 0$, es decir, $z = x$ e $y = x$. La tercera ecuación $2x - y - z = 0$ queda entonces satisfecha. Hay una variable libre:

$$(x, y, z) = t(1, 1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. El sistema homogéneo tiene soluciones $(x, y, z) = t(1, 1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Pregunta B.2 - Funciones y áreas

a) Paridad y monotonía

Como $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -f(x)$, la función es impar. Además, al ser polinómica, está definida en todo $\mathbb{R}$. Para estudiar el crecimiento y decrecimiento usamos el signo de la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$

Los puntos críticos son $x = -1$ y $x = 1$. Probamos el signo en cada intervalo: para $x = -2$, $f'(x) > 0$; para $x = 0$, $f'(x) < 0$; y para $x = 2$, $f'(x) > 0$. Por tanto, f crece en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$, y decrece en $(-1, 1)$. El cambio de signo indica un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 1$:

$$f(-1) = 2, \quad f(1) = -2.$$

Conclusión. f es impar, tiene un máximo relativo en $(-1, 2)$ y un mínimo relativo en $(1, -2)$.

b) Área entre las gráficas

Primero hallamos los puntos de corte:

$$f(x) = g(x) \iff x^3 - 3x = x^2 - 3x \iff x^2(x-1) = 0.$$

Se cortan en $x = 0$ y $x = 1$; en $0 < x < 1$, $x^2(x-1) < 0$, así que $f(x) < g(x)$. La región acotada queda entre esos dos puntos, y su área es

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - x^3) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Conclusión. El área encerrada es $\frac{1}{12}$ unidades cuadradas.

Pregunta B.3 - Rectas en el espacio

La recta r se expresa en forma paramétrica tomando como parámetro el valor común:

$$r: \quad x = 2 + 3t, \quad y = -1 - t, \quad z = t.$$

Por tanto, contiene $R = (2, -1, 0)$ y tiene vector director $\vec{u} = (3, -1, 1)$. La recta s queda

$$s: \quad x = t, \quad y = t - 5, \quad z = 3 - t,$$

con punto $S = (0, -5, 3)$ y vector director $\vec{v} = (1, 1, -1)$.

a) Posición relativa y distancia

Los vectores directores no son proporcionales. Para comprobar si las rectas son coplanarias, calculamos el producto mixto con $\overrightarrow{RS}$:

$$\overrightarrow{RS} = S - R = (0 - 2, -5 - (-1), 3 - 0) = (-2, -4, 3),$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0, 4, 4),$$

$$\overrightarrow{RS} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (-2, -4, 3) \cdot (0, 4, 4) = -4 \neq 0.$$

Así, no son coplanarias; al no ser paralelas, son rectas que se cruzan. La distancia entre rectas que se cruzan es

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{RS} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Conclusión. r y s se cruzan y su distancia es $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Recta por P perpendicular a r

Buscamos primero el pie H de la perpendicular de P a r . Todo punto de r tiene la forma $H = (2 + 3t, -1 - t, t)$, y la condición de perpendicularidad es $\overrightarrow{PH} \cdot \vec{u} = 0$:

$$\overrightarrow{PH} = (3t - 3, -t, t - 2),$$

$$(3t - 3, -t, t - 2) \cdot (3, -1, 1) = 11t - 11 = 0 \implies t = 1.$$

Así, $H = (5, -2, 1)$ y $\overrightarrow{PH} = H - P = (0, -1, -1)$. La recta buscada pasa por $P = (5, -1, 2)$ y tiene esa dirección:

$$q: \quad x = 5, \quad y = -1 - t, \quad z = 2 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. La recta pedida es la anterior.

Pregunta B.4 - Probabilidad

a) Decisión antes del cuarto turno

Interpretamos los cinco lanzamientos de cada jugador como cinco turnos alternos. Tras completar tres turnos, quedan dos lanzamientos por persona. Solo se puede decidir con seguridad en ese momento si un jugador ya tiene tres aciertos y el otro ninguno: incluso con dos aciertos más, quien va por detrás no puede igualar los tres aciertos del otro.

Sean independientes los lanzamientos. La decisión queda tomada tras tres turnos si Antonio acierta sus tres primeros dardos y Benito falla los suyos, o si ocurre lo contrario:

$$\begin{aligned}P(\text{decisión antes del cuarto turno}) &= (0,25)^3(0,70)^3 + (0,75)^3(0,30)^3 \\ &= 0,01675.\end{aligned}$$

Conclusión. La probabilidad de decidir antes del cuarto turno es 0,01675.

b) Fallar al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos

Sea X el número de fallos de Antonio. Cada lanzamiento es independiente y la probabilidad de fallar es $p = 0,75$, de modo que

$$X \sim \text{Binomial}(60, 0,75), \quad \mu = np = 45, \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{11,25}.$$

Dos terceras partes de 60 son 40, por lo que se pide $P(X \geq 40)$. Aproximamos por $N(45, \sqrt{11,25})$ y aplicamos la corrección de continuidad:

$$\begin{aligned}P(X \geq 40) &\approx P\left(Z \geq \frac{39,5 - 45}{\sqrt{11,25}}\right) \\ &\approx P(Z \geq -1,64) = P(Z \leq 1,64) = 0,9495.\end{aligned}$$

Conclusión. La probabilidad aproximada es 0,9495.