

Modelo 1 de 2020

Resolución completa de los ocho ejercicios, con desarrollo matemático y resultados exactos.

Ejercicio 1

Usamos el desarrollo $\ln(1-x) = -x - x^2/2 + o(x^2)$, del que se deduce $1/\ln(1-x) = -1/x + 1/2 + o(1)$. El otro término del límite es $(ax-1)/x = a - 1/x$. Al restar, los términos $1/x$ se cancelan y queda $1/2 - a = 7/2$. Por tanto, $a = -3$.

Ejercicio 2

Descomponemos en fracciones simples:

$$f(x) = -x - 1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x-1}.$$

Una primitiva es $F(x) = -x^2/2 - x + 3 \ln|x| - 2 \ln|x-1| + C$. La condición $F(2) = 3 \ln 2$ da $C = 4$. La primitiva pedida es

$$F(x) = -\frac{x^2}{2} - x + 3 \ln|x| - 2 \ln|x-1| + 4.$$

Ejercicio 3

La condición $AB = C$ da, fila a fila, $1 + a + b = 2$ y $c + 1 + 4 = 1$, luego $a + b = 1$ y $c = -4$. Con estos valores,

$$\det A = 13a - 8.$$

Para que el rango sea 2 se necesita $\det A = 0$, de donde $a = 8/13$ y $b = 5/13$. La matriz tiene un menor de orden dos no nulo, así que su rango es exactamente 2. Por tanto, $(a, b, c) = (8/13, 5/13, -4)$.

Ejercicio 4

El volumen del tetraedro es un sexto del valor absoluto del determinante de tres aristas desde A :

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (0, 1, 3), \quad \overrightarrow{AD} = (1, 0, 3),$$

$$V = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \right| = 1.$$

El área de la base BCD es $\frac{1}{2} |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}| = \sqrt{19}/2$. Como $V = \frac{1}{3} (\text{área base}) h$, la altura desde A vale

$$h = \frac{6}{\sqrt{19}}.$$

Ejercicio 5

Sean x, y los lados del rectángulo. La valla cubre el perímetro salvo los cuatro metros de abertura, por lo que $2x + 2y - 4 = 96$ y $x + y = 50$. El área es $A(x) = x(50 - x)$, con $0 < x < 50$. Como $A'(x) = 50 - 2x$, el máximo se alcanza en $x = 25$, y $A''(x) = -2 < 0$. Las dimensiones son $\boxed{25 \text{ m} \times 25 \text{ m}}$ y el área máxima $\boxed{625 \text{ m}^2}$.

Ejercicio 6

Con $t = x + 1$, la integral se transforma en $\int \ln(t^2 + 1) dt$. Integramos por partes, con $u = \ln(t^2 + 1)$ y $dv = dt$:

$$\int \ln(t^2 + 1) dt = t \ln(t^2 + 1) - \int \frac{2t^2}{t^2 + 1} dt.$$

Como $2t^2/(t^2 + 1) = 2 - 2/(t^2 + 1)$, resulta

$$\boxed{(x + 1) \ln((x + 1)^2 + 1) - 2(x + 1) + 2 \arctan(x + 1) + C}.$$

Ejercicio 7

La matriz de coeficientes y la ampliada tienen tres filas y dos columnas de incógnitas. Los menores de orden dos de A son $4 - 2\lambda$, $1 - \lambda^2$ y $2 - 4\lambda$; el rango de A es siempre 2. Para que el sistema sea compatible, el determinante de la ampliada debe anularse:

$$\det A^* = -3(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0.$$

Solo para $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$ es compatible; entonces $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2$, igual al número de incógnitas, y es SCD. Resolviendo:

$$\lambda = 1 : (x, y) = (7/2, -3/2), \quad \lambda = -1 : (x, y) = (3/2, -1/2).$$

Para los demás valores el sistema es SI.

Ejercicio 8

Los puntos están alineados si $C = A + t(B - A)$, donde $B - A = (3, -4, -3)$. La coordenada y da $7 = 3 - 4t$, así que $t = -1$. Las coordenadas x, z producen $a = -2$ y $b = 5$. Por tanto, $\boxed{a = -2, b = 5}$.

Para $a = b = 1$, $C = (-1, 7, 1)$. Tomando $\overrightarrow{AB} = (3, -4, -3)$ y $\overrightarrow{AC} = (0, 4, -1)$, un normal del plano es su producto vectorial $(16, 3, 12)$. La recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano tiene este vector como director:

$$\boxed{(x, y, z) = (16t, 3t, 12t), \quad t \in \mathbb{R}}.$$