

Julio de 2025 · Convocatoria extraordinaria

Resolvemos cada apartado desde los datos del enunciado. En los cálculos indicamos la regla que usamos, sustituimos los datos y explicamos qué significa el resultado.

Pregunta 1 · Probabilidad y estadística

Cada publicación recibe un "Like" con probabilidad $p = \frac{3}{5}$. Suponemos que las publicaciones se comportan de forma independiente. Para contar los "Likes" en n publicaciones usamos una distribución binomial:

$$X \sim B\left(n, \frac{3}{5}\right), P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{n-k}.$$

Aquí k es el número de publicaciones con "Like"; la probabilidad de que una publicación no reciba "Like" es $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

1.1. Ningún "Like" en cuatro publicaciones

Para que no haya ningún "Like", las cuatro publicaciones deben quedar sin él. Aplicamos la fórmula binomial con $n = 4$ y $k = 0$:

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} \left(\frac{3}{5}\right)^0 \left(\frac{2}{5}\right)^4 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{16}{625} = \boxed{\frac{16}{625} = 0,0256}.$$

La probabilidad es 0,0256, es decir, un 2,56 %.

1.2. Como máximo dos "Likes" en cuatro publicaciones

"Como máximo dos" significa $X = 0$, $X = 1$ o $X = 2$. Sumamos esas tres probabilidades:

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= \sum_{k=0}^2 \binom{4}{k} \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{4-k} \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)^4 + 4 \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{2}{5}\right)^3 + 6 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \\ &= \frac{16}{625} + \frac{96}{625} + \frac{216}{625} \\ &= \boxed{\frac{328}{625} = 0,5248}. \end{aligned}$$

Por tanto, la probabilidad de recibir dos "Likes" o menos es 0,5248, es decir, un 52,48 %.

1.3. Número mínimo de publicaciones para superar 0,999

Es más sencillo calcular primero la probabilidad contraria: que ninguna publicación reciba "Like". Para n publicaciones es $\left(\frac{2}{5}\right)^n$. Por tanto,

$$P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

Pedimos que esta probabilidad sea estrictamente mayor que 0,999:

$$1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n > 0,999 \iff \left(\frac{2}{5}\right)^n < 0,001.$$

Comprobamos los dos enteros consecutivos que rodean el cambio:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^7 = 0,0016384 > 0,001, \quad \left(\frac{2}{5}\right)^8 = 0,00065536 < 0,001.$$

Con siete publicaciones no se alcanza el umbral; con ocho sí:

$$P(X \geq 1 \mid n = 8) = 1 - 0,00065536 = 0,99934464 > 0,999.$$

Luego el menor número que cumple la condición es $\boxed{n = 8}$.

Pregunta 2 · Álgebra

2.1. Operaciones con matrices

Se dan

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.1.1. Resolver la ecuación matricial

$$(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1}.$$

Primero calculamos la potencia de B , multiplicando la matriz por sí misma:

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Para comprobar el patrón, la potencia siguiente es

$$B^3 = B^2B = IB = B.$$

Las potencias alternan entre B e I ; el ciclo tiene período 2. Así,

$$B^{2q} = I, B^{2q+1} = B.$$

Como $B^2 = I$, usamos además $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$:

$$(B^2A)^{-1} = A^{-1}(B^2)^{-1} = A^{-1}I = A^{-1}.$$

La ecuación original queda

$$A(A^{-1}) = I, (A^{-1}X)^{-1} = I.$$

Tomamos la inversa de ambos miembros:

$$A^{-1}X = I.$$

Multiplicamos por la izquierda por A , que es invertible:

$$X = AI = A.$$

$$X = A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.1.2. Determinante de $(3A^5B)^2$

Para una matriz 2×2 , $\det(kM) = k^2 \det M$, y $\det(M^2) = (\det M)^2$. Sea $M = 3A^5B$. Primero:

$$\det A = 1, \det B = (1)(-1) - (2)(0) = -1.$$

Aplicamos las propiedades del determinante:

$$\begin{aligned} \det((3A^5B)^2) &= (\det M)^2 \\ &= (3^2(\det A)^5 \det B)^2 \\ &= (9 \cdot 1^5 \cdot (-1))^2 \\ &= (-9)^2 \\ &= \boxed{81}. \end{aligned}$$

2.1.3. Hallar a y b

El enunciado pide $aB^{100} + bB^{99} = A + C$. Calculamos primero las matrices del segundo miembro y las potencias necesarias:

$$A + C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Como las potencias de B tienen período 2, dividimos los exponentes entre 2: $100 = 2 \cdot 50$ y $99 = 2 \cdot 49 + 1$. Por tanto,

$$B^{100} = I, B^{99} = B.$$

La igualdad matricial se convierte en

$$aI + bB = \begin{pmatrix} a+b & 2b \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Igualemos las entradas correspondientes:

$$a + b = 1, 2b = 0, a - b = 1.$$

De $2b = 0$ resulta $b = 0$; al sustituirlo, $a = 1$. La solución es

$$\boxed{a = 1, b = 0}.$$

2.2. Discusión del sistema según el parámetro

$$\begin{cases} x - ay - z = -a, \\ ax - y + z = a, \\ ax + y = a. \end{cases}$$

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}, A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -1 & -a \\ a & -1 & 1 & a \\ a & 1 & 0 & a \end{array} \right).$$

Usamos el determinante para localizar los valores que pueden cambiar el rango:

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (-a) \begin{vmatrix} a & 1 \\ a & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} a & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix} \\ &= -1 - a^2 - 2a \\ &= -(a+1)^2. \end{aligned}$$

Caso $a \neq -1$

Entonces $\det A \neq 0$, así que $\text{rg}(A) = 3$. La matriz ampliada tiene tres filas, por lo que su rango no puede superar **3**; como contiene a A , también tiene rango **3**:

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 = \text{número de incógnitas}.$$

Por Rouché–Frobenius, el sistema es **compatible determinado (SCD)**: tiene una única solución.

Para hallarla, usamos la regla de Cramer. El denominador común es $\Delta = \det A = -(a+1)^2$. Al sustituir cada columna por la columna de términos independientes $b = (-a, a, a)^T$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \begin{vmatrix} -a & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = a - a^2 - 2a = -a(a+1), \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & a & 1 \\ a & a & 0 \end{vmatrix} = -a - a^2 = -a(a+1), \\ \Delta_z &= \begin{vmatrix} 1 & -a & -a \\ a & -1 & a \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = -2a - 2a^2 = -2a(a+1). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{a}{a+1}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{a}{a+1}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{2a}{a+1}.$$

La solución única para $a \neq -1$ es

$$\boxed{(x, y, z) = \left(\frac{a}{a+1}, \frac{a}{a+1}, \frac{2a}{a+1} \right)}.$$

Caso $a = -1$

Sustituimos el parámetro en las dos matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

El determinante de A es cero, luego su rango es menor que **3**. Comprobamos que tiene un menor de orden **2** no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0.$$

Así, $\text{rg}(A) = 2$. En A^* , la segunda fila es la primera multiplicada por -1 , también en la columna ampliada. Por ello el rango ampliado no supera **2**; el menor anterior sigue siendo no nulo, y entonces

$$\text{rg}(A^*) = 2.$$

Por Rouché-Frobenius,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3.$$

El sistema es **compatible indeterminado (SCI)** y tiene infinitas soluciones. Tomamos $x = t$, con $t \in \mathbb{R}$. La tercera ecuación da $y = t - 1$, y la primera da $z = 2t - 2$. Por tanto,

$$(x, y, z) = (t, t - 1, 2t - 2), t \in \mathbb{R}.$$

En resumen: si $a \neq -1$, el sistema es SCD; si $a = -1$, es SCI. No aparece ningún caso incompatible.

Pregunta 3 · Geometría

3.1. Posición relativa de dos planos

$$\pi_1 : x + 2y + mz = -1, \pi_2 : x + z = 6.$$

Sus vectores normales, leídos de los coeficientes de x, y, z , son

$$\vec{n}_1 = (1, 2, m), \vec{n}_2 = (1, 0, 1).$$

3.1.1. Planos perpendiculares

Dos planos son perpendiculares cuando lo son sus vectores normales; usamos el producto escalar:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + m \cdot 1 = 1 + m.$$

La perpendicularidad exige que este producto sea cero:

$$1 + m = 0 \implies \boxed{m = -1}.$$

3.1.2. Planos que forman un ángulo de 45°

El ángulo entre planos se calcula con el ángulo agudo entre sus normales:

$$\cos 45^\circ = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|}.$$

Sustituimos los productos y las normas:

$$\frac{|m + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + m^2} \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Como $\sqrt{1^2 + 2^2 + m^2} = \sqrt{m^2 + 5}$ y $\|\vec{n}_2\| = \sqrt{2}$, al simplificar y elevar al cuadrado:

$$\frac{|m + 1|}{\sqrt{m^2 + 5}} = 1 \implies (m + 1)^2 = m^2 + 5 \implies 2m = 4.$$

Por tanto, $\boxed{m = 2}$.

3.1.3. Recta de intersección en forma paramétrica

Escribimos el segundo plano en forma general, como ya aparece en el enunciado. Para parametrizar la recta común, elegimos $z = 2t$. De π_2 :

$$x + 2t = 6 \implies x = 6 - 2t.$$

Sustituimos x y z en π_1 :

$$(6 - 2t) + 2y + 2mt = -1 \implies 2y = -7 + 2(1 - m)t \implies y = -\frac{7}{2} + (1 - m)t.$$

La intersección, válida para cualquier valor de m , queda exclusivamente en forma paramétrica:

$$r : \begin{cases} x = 6 - 2t, \\ y = -\frac{7}{2} + (1 - m)t, \\ z = 2t, \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

Para el valor $m = 2$ del apartado anterior, se obtiene

$$r : \begin{cases} x = 6 - 2t, \\ y = -\frac{7}{2} - t, \\ z = 2t, \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

3.2. Recta contenida en un plano y simétrica de un punto

$$\pi : 3x + y - z = 2, P = (0, 1, -1), Q = (1, a, 1).$$

3.2.1. Valor de a para que la recta PQ esté contenida en el plano

Para que toda la recta que pasa por P y Q esté en π , ambos puntos deben pertenecer al plano. Comprobamos primero P :

$$3(0) + 1 - (-1) = 2,$$

por tanto $P \in \pi$. Comprobamos ahora Q :

$$3(1) + a - 1 = 2 \implies 2 + a = 2 \implies \boxed{a = 0}.$$

Con ese valor, los dos puntos están en el plano y, por tanto, la recta PQ queda contenida en él.

3.2.2. Simétrico de Q para $a = 1$

Para $a = 1$, $Q = (1, 1, 1)$. El vector normal del plano es $\vec{n} = (3, 1, -1)$, y $\|\vec{n}\|^2 = 3^2 + 1^2 + (-1)^2 = 11$. La reflexión de un punto Q respecto de $3x + y - z - 2 = 0$ se calcula mediante

$$Q' = Q - 2 \frac{3x_Q + y_Q - z_Q - 2}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}.$$

Sustituimos las coordenadas de Q :

$$3(1) + 1 - 1 - 2 = 1, Q' = (1, 1, 1) - \frac{2}{11}(3, 1, -1).$$

Restando coordenada a coordenada:

$$Q' = \left(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11} \right).$$

Pregunta 4 · Análisis

4.1. Estudio y representación de $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

Dominio y asíntotas

Una función racional está definida cuando su denominador no es cero. Aquí

$$x^2 + 1 \geq 1 > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

así que el denominador nunca se anula y el dominio es $\mathbb{R}$.

No hay asíntotas verticales porque no hay puntos excluidos del dominio. Para estudiar las horizontales, dividimos numerador y denominador por x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1/x}{1 + 1/x^2} = 0.$$

La asíntota horizontal es $y = 0$. No hay oblicua: al existir horizontal, no aparece una recta oblicua distinta; equivalentemente, el cociente de los grados del numerador y denominador tiene grado menor arriba.

Derivada, crecimiento y decrecimiento

Aplicamos la regla del cociente, $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

El denominador es siempre positivo. Los puntos críticos se obtienen igualando a cero el numerador:

$$1 - x^2 = 0 \implies x = -1 \text{ o } x = 1.$$

Probamos un valor en cada intervalo, y anotamos solo el signo de la derivada:

Intervalo	Valor de prueba	Signo de f'	Comportamiento
$(-\infty, -1)$	$x = -2 : f'(-2) = -3/25$	-	Decreciente
$(-1, 1)$	$x = 0 : f'(0) = 1$	+	Creciente
$(1, \infty)$	$x = 2 : f'(2) = -3/25$	-	Decreciente

En $x = -1$, el signo cambia de $-$ a $+$: hay un mínimo. En $x = 1$, cambia de $+$ a $-$: hay un máximo. No hay puntos excluidos del dominio.

Extremos y gráfica

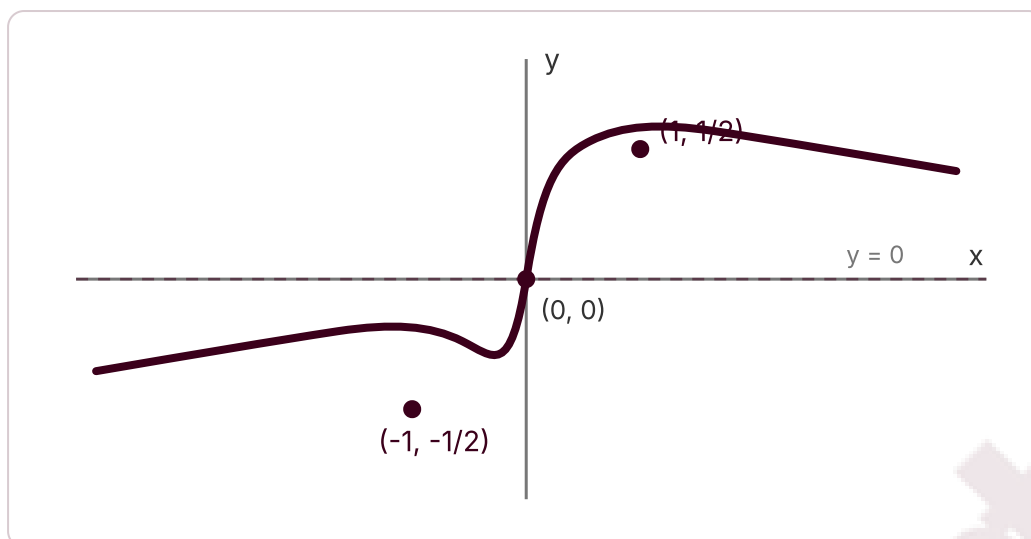
Evaluamos la función en los dos puntos críticos:

$$f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2 + 1} = -\frac{1}{2}, \quad f(1) = \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Como la función solo crece entre -1 y 1 , y decrece a ambos lados hacia el límite 0 , estos son también los extremos absolutos:

$$\text{mínimo absoluto } (-1, -\frac{1}{2}), \text{ máximo absoluto } (1, \frac{1}{2}).$$

Además, $f(0) = 0$, así que la curva pasa por el origen. El dibujo esquemático muestra los extremos, el corte con los ejes y la asíntota horizontal:



4.2. Funciones $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = 8x$

Dominio, asíntotas y monotonía de f

La función f es racional; su denominador no puede ser cero:

$$x^2 = 0 \iff x = 0.$$

Por tanto,

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Al acercarnos a cero por cualquiera de los dos lados, x^2 tiende a cero por valores positivos y $1/x^2$ crece sin límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Así, $x = 0$ es asíntota vertical. En los extremos,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0,$$

por lo que $y = 0$ es asíntota horizontal. No existe asíntota oblicua porque ya hay asíntota horizontal.

Derivamos usando la potencia x^{-2} :

$$f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

La derivada no se anula en el dominio; el punto $x = 0$ no pertenece al dominio y separa los intervalos. Comprobamos el signo a cada lado:

Intervalo	Valor de prueba	Signo de f'	Comportamiento
$(-\infty, 0)$	$x = -1 : f'(-1) = 2$	+	Creciente
$(0, \infty)$	$x = 1 : f'(1) = -2$	-	Decreciente

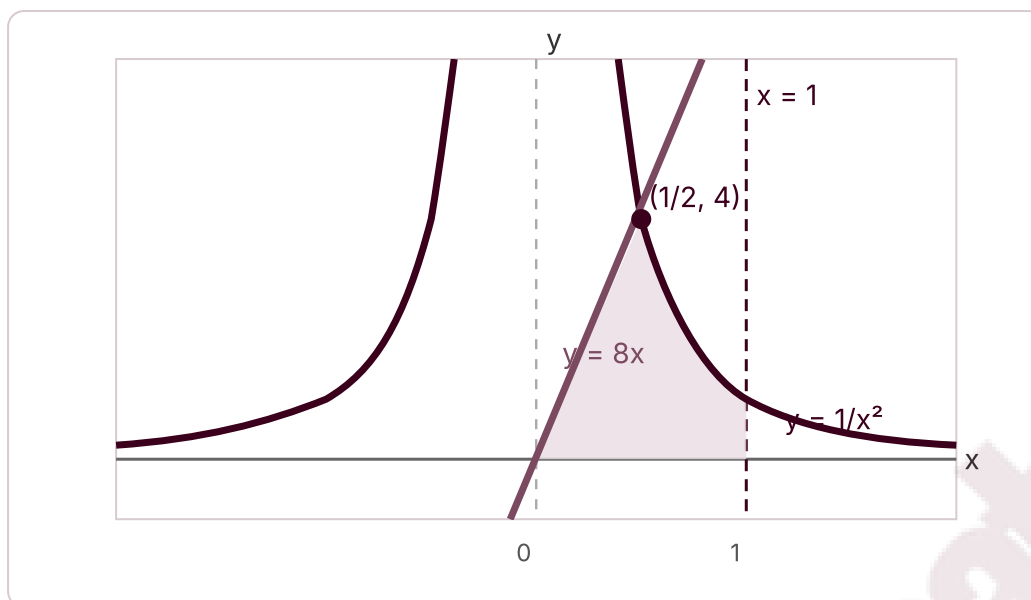
En $x = 0$ no hay máximo ni mínimo, porque la función no está definida allí. La función es creciente a su izquierda y decreciente a su derecha.

Gráficas propias y punto de corte

La recta $g(x) = 8x$ pasa por el origen y tiene pendiente positiva 8. Para encontrar su corte con f , igualamos las expresiones:

$$\frac{1}{x^2} = 8x \implies 8x^3 = 1 \implies x = \frac{1}{2}, y = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

El único punto de corte es $(\frac{1}{2}, 4)$. El siguiente esquema propio muestra ambas curvas, el eje x y la recta $x = 1$; la zona coloreada es la región cuya área pide el enunciado.



Área del recinto

En $0 < x < \frac{1}{2}$, la recta $g(x) = 8x$ queda por debajo de $f(x) = 1/x^2$, pero el borde superior del recinto cerrado por el eje x es g . En $\frac{1}{2} < x \leq 1$, el borde superior es f . Por eso separamos el área en dos integrales:

$$A = \int_0^{1/2} 8x \, dx + \int_{1/2}^1 \frac{1}{x^2} \, dx.$$

Calculamos las primitivas antes de evaluar:

$$\int 8x \, dx = 8 \frac{x^2}{2} = 4x^2, \quad \int \frac{1}{x^2} \, dx = \int x^{-2} \, dx = -x^{-1} = -\frac{1}{x}.$$

Evaluamos cada primitiva en el intervalo correspondiente:

$$\begin{aligned} A &= [4x^2]_0^{1/2} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{1/2}^1 \\ &= \left(4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4(0)^2\right) + \left(-\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{1/2}\right)\right) \\ &= 1 + 1 \\ &= \boxed{2 \text{ unidades}^2}. \end{aligned}$$

El área pedida es $\boxed{2 \text{ unidades cuadradas}}$.