

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Obtener la matriz X que verifica $AX - B = 3X$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Solución:**Despejamos la matriz X de la expresión $AX - B = 3X$*

$$AX - 3X = B$$

 $(A - 3I)X = B$; si existe la inversa de la matriz $(A - 3I)$, multiplicamos por la izquierda *$(A - 3I)^{-1}(A - 3I)X = (A - 3I)^{-1}B$; efectuando las operaciones,* *$X = (A - 3I)^{-1}B$; obteniendo la matriz X buscada.**Calculamos la matriz $A - 3I$,*

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz $A - 3I$,

$$|A - 3I| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3 + 4 - 6 = -5 \neq 0$$

como es distinto de cero podemos calcular $(A - 3I)^{-1}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 9 \\ 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ij}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 9 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 9 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$(A - 3I)^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 9 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{-9}{5} & \frac{-4}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

Finalmente calculamos el valor de la matriz X ,

$$X = (A - 3I)^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{-9}{5} & \frac{-4}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \\ \frac{18}{5} + \frac{4}{5} + \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} \\ \frac{9}{5} \\ \frac{28}{5} \end{pmatrix}$$

$$\text{El resultado final es, } X = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 9/5 \\ 28/5 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Un fabricante produce en dos talleres tres modelos distintos de archivadores, el A, el B y el C. Se ha comprometido a entregar 12 archivadores del modelo A, 8 del B y 24 del C. Al fabricante le cuesta 720€ al día el funcionamiento del primer taller y 960€ el del segundo. El primer taller produce diariamente 4 archivadores del modelo A, 2 del B y 4 del C, mientras que el segundo produce 2, 2 y 12 archivadores, respectivamente. ¿Cuántos días debe trabajar cada taller para, cumpliendo el contrato, conseguir reducir al máximo los costes de funcionamiento? ¿Cuál es el valor de dicho coste? ¿Quedaría algún excedente de algún producto en los talleres? En caso afirmativo, determinar cuánto.

Solución:

Utilizando las siguientes incógnitas: $x = n^{\circ}$ de días que trabaja el 1^{er} taller
 $y = n^{\circ}$ de días que trabaja el 2^o taller

Escribimos los datos del problema en una tabla,

	A	B	C	coste
Taller 1	4	2	4	720
Taller 2	2	2	12	960
	$4x + 2y$	$2x + 2y$	$4x + 12y$	$720x + 960y$

las restricciones del problema serán:

“Se ha comprometido a entregar 12 archivadores del modelo A” $4x + 2y \geq 12$

“Se ha comprometido a entregar 8 archivadores del modelo B” $2x + 2y \geq 8$

“Se ha comprometido a entregar 24 archivadores del modelo C” $4x + 12y \geq 24$

El coste de funcionamiento de los talleres es: $720x + 960y$

Por tanto el problema a resolver es,

minimizar $z = 720x + 960y$

s.a. $4x + 2y \geq 12$
 $2x + 2y \geq 8$
 $4x + 12y \geq 24$
 $x, y \in \mathbb{N}$

Simplificando queda:

minimizar $z = 240(3x + 4y)$

s.a. $2x + y \geq 6$
 $x + y \geq 4$
 $x + 3y \geq 6$
 $x, y \in \mathbb{N}$

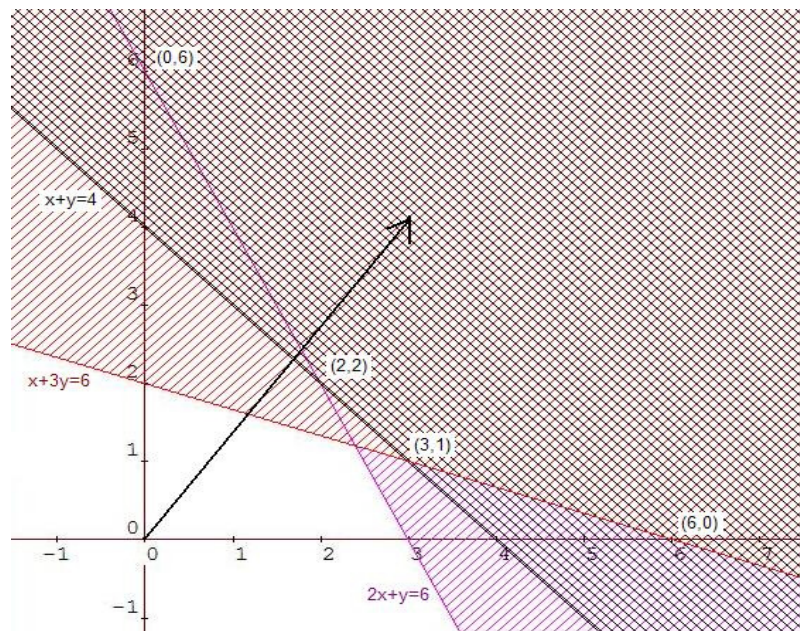
Cálculos para representar gráficamente las restricciones,

$2x + y \geq 6$			$x + y \geq 4$			$x + 3y \geq 6$		
$2x + y = 6$			$x + y = 4$			$x + 3y = 6$		
x	y		x	y		x	y	
0	6		0	4		0	2	
3	0		4	0		6	0	
(0,0) ¿cumple la restricción? No $2 \cdot 0 + 0 \geq 6$ No			(0,0) ¿cumple la restricción? No $0 + 0 \geq 4$ No			(0,0) ¿cumple la restricción? No $0 + 3 \cdot 0 \geq 6$ No		

Calculemos los puntos de corte que necesitamos conocer,

$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases}$	Restando ambas ecuaciones, $x = 2$ Sustituyendo en la 2 ^a $2 + y = 4; y = 2$	El punto de corte es $(2, 2)$
$\begin{cases} x + y = 4 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$	Restando ambas ecuaciones, $2y = 2 \rightarrow y = 1$ Sustituyendo el valor de y en la 1 ^a ecuación, $x + 1 = 4 \rightarrow x = 3$	El punto de corte es $(3, 1)$

La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona triplemente rayada.



Estudiamos la función z en los extremos de la región factible,

(x,y)	$z = 240 (3x + 4y)$		Solución: El primer taller debe trabajar 3 días y el segundo 1 día. El coste de funcionamiento sería de 3120 €.
$(0, 6)$	$240 (3 \cdot 0 + 4 \cdot 6) = 5760$		
$(2, 2)$	$240 (3 \cdot 2 + 4 \cdot 2) = 3360$		
$(3, 1)$	$240 (3 \cdot 3 + 4 \cdot 1) = 3120$	mínimo	
$(6, 0)$	$240 (3 \cdot 6 + 4 \cdot 0) = 4320$		

La solución obtenida implica que se producirían los siguientes archivadores,

modelo	nº de archivadores
A	$4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 14$
B	$2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 8$
C	$4 \cdot 3 + 12 \cdot 1 = 24$

como hay que entregar 12 archivadores del modelo A, 8 del B y 24 del C, sobrarían 2 archivadores del modelo A.

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Un restaurante abre a las 8 de la noche y cierra cuando todos los clientes se han ido. La función $C(t) = 60t - 10t^2$ representa el número de clientes que hay en el restaurante en función del número de horas t que lleva abierto el establecimiento. Se pide:

- Determinar el número máximo de clientes que van a una determinada noche al restaurante. Justificar que es un máximo.
- Si deseamos ir al restaurante cuando haya al menos 50 personas y no más de 80, ¿entre qué horas tendríamos que ir?

Solución:

(Nota: Como t representa el número de horas que lleva abierto el establecimiento y este abre a las 8 de la noche, para pasar de valores de t a hora de la noche calculamos $t+8$)

Representamos la función $y = 60t - 10t^2$

$C(t)$ es un polinomio de segundo grado, su representación gráfica será una parábola.

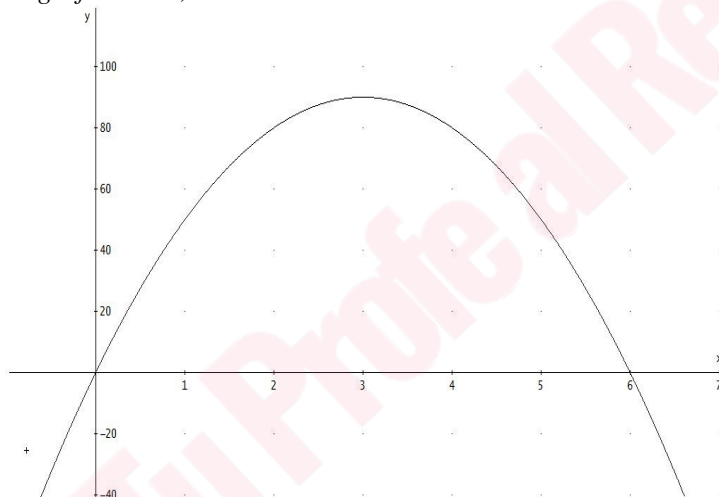
- Puntos de corte con el eje OX $(0, 0)$ y $(6, 0)$

$$60t - 10t^2 = 0 \rightarrow 10t(6 - t) = 0 \rightarrow t = 0 \text{ o } t = 6$$

- Vértice $(3, 90)$

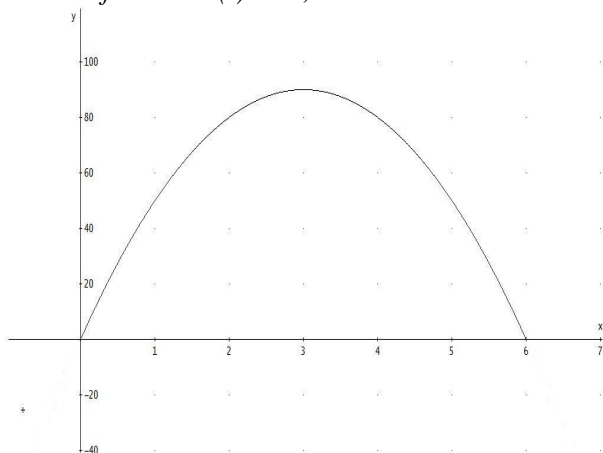
$$t = \frac{-60}{2(-10)} = \frac{-60}{-20} = 3, \quad y = 60 \cdot 3 - 10 \cdot 3^2 = 180 - 90 = 90$$

La representación gráfica será,



La función $C(t) = 60t - 10t^2$ que representa el número de clientes en el restaurante estará definida en el intervalo $[0, 6]$ puesto que fuera de ese intervalo $C(t)$ toma valores negativos. Es decir, el restaurante abre a las 8 de la noche y cerrará a las, $8+6=14$, 2 de la madrugada.

La representación de la función $C(t)$ será,



a) El número máximo de clientes que van una determinada noche al restaurante se alcanza en el vértice de la parábola. El vértice de la parábola es el punto (3 , 90). Por tanto, el número máximo de clientes será de 90.

b) Si deseamos ir al restaurante cuando haya al menos 50 personas y no más de 80, queremos que $50 \leq C(t) \leq 80$, es decir, $50 \leq 60t - 10t^2 \leq 80$ debemos resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 60t - 10t^2 \leq 80 \\ 60t - 10t^2 \geq 50 \end{cases}$$

Resolución de la 1ª inecuación,

$$-10t^2 + 60t - 80 \leq 0 \quad \text{simplificando por 10}$$

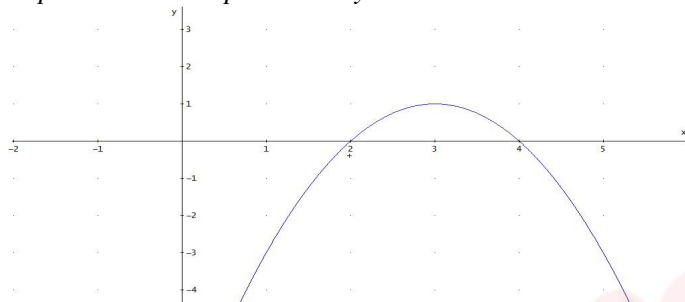
$$-t^2 + 6t - 8 \leq 0$$

$$\text{Resolvemos la ecuación} \quad -t^2 + 6t - 8 = 0$$

$$t = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-1)(-8)}}{2(-1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{-2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{-2} = \frac{-6 \pm 2}{-2}$$

$$t_1 = \frac{-6 + 2}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \quad t_2 = \frac{-6 - 2}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Representamos la parábola $y = -t^2 + 6t - 8$



La solución de la inecuación son los valores de t en donde la parábola es menor o igual que cero, es decir, $t \in (-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$

Resolución de la 2ª inecuación,

$$-10t^2 + 60t - 50 \geq 0 \quad \text{simplificando por 10}$$

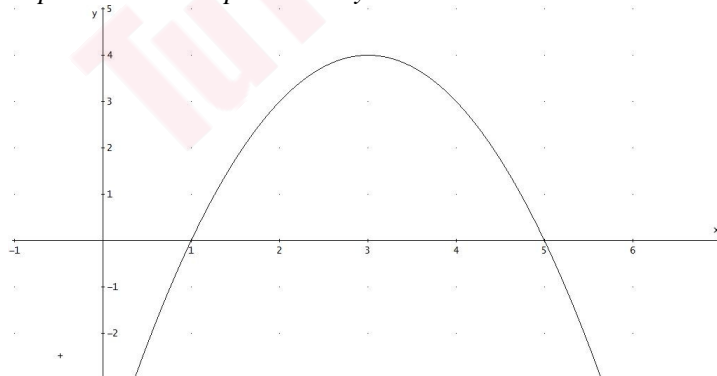
$$-t^2 + 6t - 5 \geq 0$$

$$\text{Resolvemos la ecuación} \quad -t^2 + 6t - 5 = 0$$

$$t = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-1)(-5)}}{2(-1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{-2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{-6 \pm 4}{-2}$$

$$t_1 = \frac{-6 + 4}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad t_2 = \frac{-6 - 4}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5$$

Representamos la parábola $y = -t^2 + 6t - 5$



La solución de la inecuación son los valores de t en donde la parábola es mayor o igual que cero, es decir, $t \in [1, 5]$

La solución del sistema de inecuaciones son los valores de t en que se cumplen las dos inecuaciones, en este caso: $t \in [1, 2] \cup [4, 5]$

Por tanto, deberíamos ir al restaurante entre las 9 y 10 de la noche, o bien, entre las 12 y la 1 de la madrugada.

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. Se ha realizado una encuesta a un grupo de estudiantes de informática. Entre sus conclusiones está que en un 40% ha recibido algún curso de LINUX. Además, el 20% de aquellos que recibieron algún curso de LINUX tienen ordenador en casa. Si un 10% de estudiantes de informática tienen ordenador en casa y no han recibido ningún curso de LINUX, calcular:

- La probabilidad de que un estudiante de informática tenga ordenador en casa y haya recibido un curso de LINUX.
- La probabilidad de que un estudiante de informática tenga ordenador en casa.
- Si un estudiante de informática tiene ordenador en casa, la probabilidad de que haya recibido un curso de LINUX.

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos:

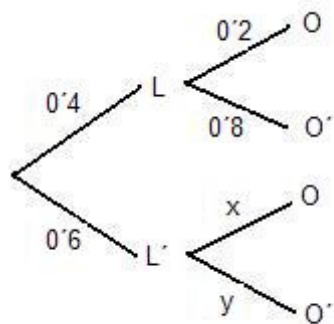
L = recibir curso de LINUX

L' = no recibir curso de LINUX

O = tener ordenador en casa

O' = no tener ordenador en casa

De los datos del enunciado obtenemos el siguiente árbol,



Cálculo de los valores de x e y .

Como sabemos, por el enunciado, que un 10% de estudiantes de informática tienen ordenador en casa y no han recibido ningún curso de LINUX, esto quiere decir que $P(L' \cap O) = 0.1$

$$P(L' \cap O) = P(L') P(O/L')$$

$$0.1 = 0.6x, \text{ por lo tanto, } x = 1/6$$

$$P(L \cap O) + P(L \cap O') + P(L' \cap O) + P(L' \cap O') = 1$$

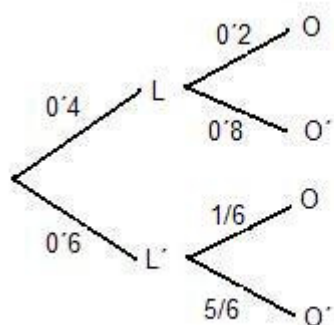
$$0.4 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.8 + 0.1 + 0.6 \cdot y = 1$$

$$0.08 + 0.32 + 0.1 + 0.6y = 1$$

$$0.5 + 0.6y = 1$$

$$0.6y = 0.5 \rightarrow y = 0.5/0.6 \rightarrow y = 5/6$$

El árbol del problema será,



$$a) P(L \cap O) = 0.4 \cdot 0.2 = 0.08$$

$$b) P(O) = P(L \cap O) + P(L' \cap O) = 0.08 + 0.1 = 0.18$$

$$c) P(L/O) = \frac{P(L \cap O)}{P(O)} = \frac{0.08}{0.18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Dos hijos deciden hacer un regalo de 100€ a su madre. Como no tienen suficiente dinero, cuentan con la ayuda de su padre, decidiendo pagar el regalo de la siguiente forma: el padre paga el triple de lo que pagan los dos hijos juntos y, por cada 2€ que paga el hermano menor, el mayor paga 3€. ¿Cuánto dinero ha de poner cada uno?

Solución:

Consideramos las siguientes incógnitas:

dinero puesto por el padre = x

dinero puesto por el hijo mayor = y

dinero puesto por el hijo menor = z

De los datos del enunciado obtenemos las siguientes ecuaciones:

“hacer un regalo de 100€ a su madre” $x + y + z = 100$

“el padre paga el triple de lo que pagan los dos hijos juntos” $x = 3 (y + z)$

“por cada 2€ que paga el hermano menor, el mayor paga 3€” $y = 3 (z / 2)$

El sistema a resolver será,

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ x - 3y - 3z = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes del sistema,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 9 + 2 + 6 + 3 = 20 \neq 0$$

Podemos resolver el sistema por la regla de Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 100 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{20} = \frac{100 \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{20} = \frac{100 (9 + 6)}{20} = 5 \cdot 15 = 75$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 100 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{20} = \frac{-100 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}}{20} = \frac{-100 (-3)}{20} = -5 \cdot (-3) = 15$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 100 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{20} = \frac{100 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{20} = \frac{100 (2)}{20} = 5 \cdot 2 = 10$$

La solución es: el padre ha de poner 75 €, el hijo mayor 15 € y el menor 10 €.

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Calcular los puntos de la región definida por

$$\begin{aligned}x + y &\geq 6 \\ 2x + y &\leq 15 \\ 3 &\leq x \leq 6 \\ 2 &\leq y \leq 5\end{aligned}$$

donde la función $z = 3x + 2y$ alcanza los valores máximo y mínimo. Calcular dichos valores.*Solución:**Cálculos para representar gráficamente las restricciones,*

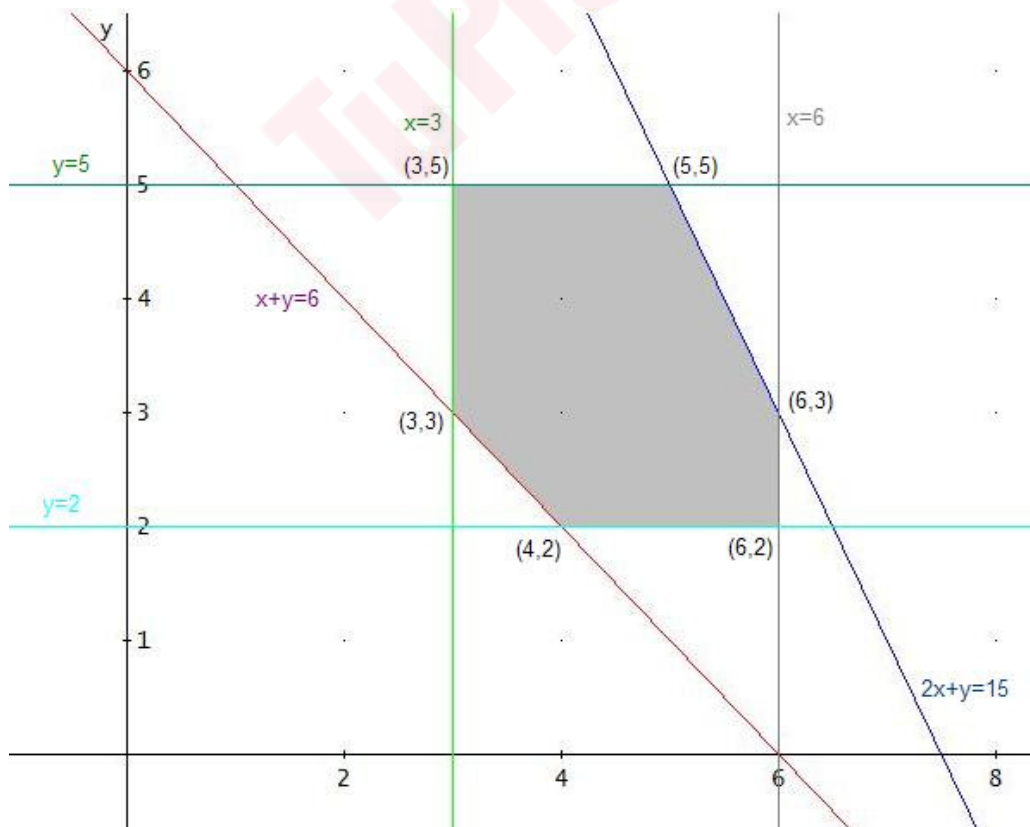
$x + y \geq 6$			$2x + y \leq 15$		
$x + y = 6$			$2x + y = 15$		
x	y		x	y	
0	6		0	15	
6	0		7.5	0	
(0,0) ¿cumple la restricción? No $0 + 0 \geq 6$ No			(0,0) ¿cumple la restricción? Sí $2 \cdot 0 + 0 \leq 15$ Sí		

Calculemos los puntos de corte que necesitamos conocer,

$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + y = 15 \end{cases}$	Restando ambas ecuaciones, $x = 9$ Sustituyendo en la 1ª, $9 + y = 6$; $y = -3$	El punto de corte es $(9, -3)$
--	---	--------------------------------

Los restantes puntos de corte se obtienen más fácilmente,

Entre $x + y = 6$ y $x = 3$, $(3, 3)$	Entre $2x + y = 15$ y $x = 3$, $(3, 9)$
Entre $x + y = 6$ y $x = 6$, $(6, 0)$	Entre $2x + y = 15$ y $x = 6$, $(6, 3)$
Entre $x + y = 6$ e $y = 2$, $(4, 2)$	Entre $2x + y = 15$ e $y = 2$, $(6.5, 2)$
Entre $x + y = 6$ e $y = 5$, $(1, 5)$	Entre $2x + y = 15$ e $y = 5$, $(5, 5)$

La región factible está formada por los puntos de la zona coloreada.

Estudiamos la función z en los extremos de la región factible,

(x,y)	$z = 3x + 2y$	
$(3, 3)$	$3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 15$	mínimo
$(3, 5)$	$3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 19$	
$(5, 5)$	$3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 25$	máximo
$(6, 3)$	$3 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 24$	
$(6, 2)$	$3 \cdot 6 + 2 \cdot 2 = 22$	
$(4, 2)$	$3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 16$	

Solución:

La función $z = 3x + 2y$ alcanza
el mínimo en el punto $(3, 3)$ con un valor de 15
el máximo en el punto $(5, 5)$ con un valor de 25

Tu Profe al Rescate

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Se quiere imprimir un cartel anunciador rectangular que debe contener 18 cm^2 de texto impreso (también rectangular). Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm cada uno, mientras que los laterales deben ser de 1 cm. Calcular las dimensiones del cartel para que el gasto de papel sea mínimo y justificar que dicho gasto es realmente mínimo.

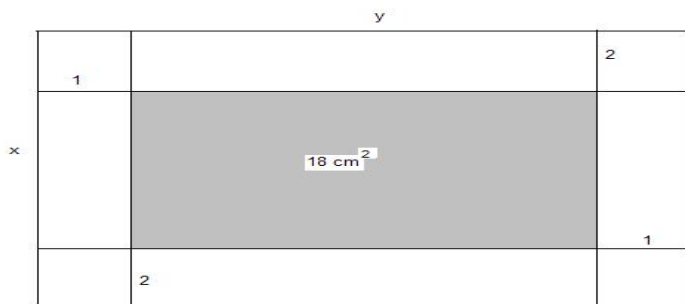
Solución:

Utilizamos las siguientes variables,

$x = \text{alto del cartel}$

$y = \text{ancho del cartel}$

El problema que queremos resolver podemos representarlo de la siguiente forma,



El gasto del cartel estará en función de la dimensión del cartel, es decir, $G = x y$ que será la función a minimizar. La relación entre las variables x e y viene dada por los 18 cm^2 de texto impreso que debe tener el cartel, por lo tanto $(x - 4)(y - 2) = 18$, despejamos de esta expresión la variable y ,

$$y - 2 = \frac{18}{x - 4} \rightarrow y = \frac{18}{x - 4} + 2$$

Por lo que $G = x \left(\frac{18}{x - 4} + 2 \right) = \frac{18x}{x - 4} + 2x$

Calculamos $G' = \frac{18(x - 4) - 18x}{(x - 4)^2} + 2 = \frac{18x - 72 - 18x}{(x - 4)^2} + 2 = \frac{-72}{(x - 4)^2} + 2$

Calculamos $G'' = \frac{72 \cdot 2(x - 4)}{(x - 4)^3} = \frac{144}{(x - 4)^2}$

$$G' = 0 \rightarrow \frac{-72}{(x - 4)^2} + 2 = 0 \rightarrow \frac{-72}{(x - 4)^2} = -2 \rightarrow -72 = -2(x - 4)^2 \rightarrow (x - 4)^2 = 36 \rightarrow x - 4 = \pm 6$$

Dos posibles soluciones: $\begin{cases} x - 4 = 6 \rightarrow x = 10 \\ x - 4 = -6 \rightarrow x = -2 \end{cases}$ No es válida, la longitud de un lado no puede ser negativa.

$$G''(10) = \frac{144}{(10 - 4)^2} = \frac{144}{36} > 0 \rightarrow \text{En } x = 10 \text{ la función } G \text{ alcanza un mínimo relativo.}$$

Para $x = 10 \rightarrow y = \frac{18}{10 - 4} + 2 = \frac{18}{6} + 2 = 3 + 2 = 5$

Solución: el cartel será un rectángulo de base 5 cm y alto 10 cm.

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. En una población hay el doble de mujeres que de hombres. El 25% de las mujeres son rubias y el 10% de los hombres también son rubios. Calcular:

- Se elige al azar una persona y resulta ser rubia, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar sea hombre y no sea rubio?

Solución:

Consideramos los sucesos,

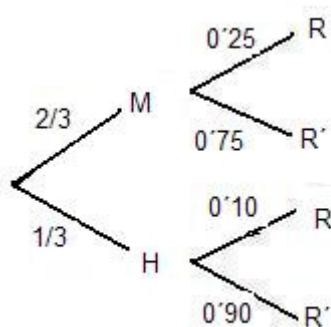
M = ser mujer

H = ser hombre

R = ser rubio

R' = no ser rubio

El árbol del problema es,



$$a) \quad P(M / R) = \frac{P(M \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0.25}{\frac{2}{3} \cdot 0.25 + \frac{1}{3} \cdot 0.10} = \frac{\frac{0.5}{3}}{\frac{0.5}{3} + \frac{0.1}{3}} = \frac{\frac{0.5}{3}}{\frac{0.6}{3}} = \frac{0.5}{0.6} = \frac{5}{6}$$

$$b) \quad P(H \cap R') = \frac{1}{3} \cdot 0.90 = 0.3$$