

4-1 聯立方程的矩陣表達 20110 張霆威

一、是非題(2 小題，每格 4 分，共 8 分)

1.

(X)

聯立方程式
$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$$
有異於(0,0,0)的解，則必有無窮多組解或無限多組解跟單一解。
2.

(X)

用矩陣列運算求解方程組的過程中，可將任二行列互換。

二、單選題(3 小題，每格 4 分，共 12 分)

1.

(C)

設矩陣
$$\begin{bmatrix} a & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & b & 7 \\ 3 & -5 & 4 & c \end{bmatrix}$$
經過矩陣列運算得
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -11 & 1 & -21 \end{bmatrix}$$
，則 $a+b+c=$ (A)1 (B)2 (C)3 (D)4 (E)5
a=1 c=3 b=-1(代入 y=2 z=1)
2.

(C)

小新每天早上幫全家人買早餐，前天買 3 個蛋餅、4 個包子及 1 個饅頭；昨天買 2 個蛋餅、2 個包子及 4 個饅頭；今天買 1 個蛋餅、4 個包子及 4 個饅頭；發現這三天早餐都是 85 元。那麼他明天想買 3 個蛋餅、2 個包子及 3 個饅頭需要多少錢？ (A)80 元 (B)85 元 (C)90 元 (D)95 元
45+15+30=90
3.

(C)

若聯立方程式
$$\begin{cases} x-y+2z=1-a \\ x+3y-3z=1+a \\ 3x+y+z=a \end{cases}$$
有解，求 a 之值為 (A)1 (B)2 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{5}{2}$ (E) $\frac{7}{2}$
0x+0y+0z=3-2a

三、多選題(4 小題，每格 5 分，共 20 分)

1.

(ABC)

下列哪些增廣矩陣所表示的一次聯立方程式恰有一組解？ (A)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$
 (B)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$
 (C)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
 (D)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 (E)
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D 無解 E 無限多組解
2.

(BC)

某便利商店將 2400 元全部換成若干個 5 元及 1 元硬幣供客人兌換零錢，假設便利商店僅供應三種兌換零錢方式：(甲)將 10 元換成 2 個 5 元硬幣，(乙)將 10 元換成 1 個 5 元硬幣及 5 個 1 元硬幣，(丙)將 10 元換成 10 個 1 元硬幣。已知以(甲)(丙)兩種兌換方式的人數總和等於第(乙)種兌換方式的人數，且以(甲)(乙)兩種兌換方式的人數總和等於第(丙)種兌換方式人數的 2 倍。假設 2400 元硬幣正好完全兌換完畢，則下列選項何者正確？ (A)(甲)種換零錢方式有 50 人 (B)(乙)種換零錢方式有 120 人 (C)(丙)種換零錢方式有 80 人 (D)商店一開始將 2400 元換成 300 個 5 元硬幣 (E)商店一開始將 2400 元換成 1200 個 1 元硬幣
設 x=甲 y=乙 z=丙
x+y=2z x+z=y 10(x+y+z)=2400
解聯立方程可得 x=40 y=120 z=80
1 元硬幣：5y+10z=1400 5 元硬幣=2x+y=320
3.

(ABE)

考慮 x, y, z 的方程組
$$\begin{cases} 2^x-3^y+5^z=-1 \\ 2^{x+1}+3^y-5^z=4 \\ 2^{x+1}+3^{y+1}+a5^z=8 \end{cases}$$
，其中 a 為實數。請選出正確的選項： (A)若 (x,y,z) 為此方程組的解，則 $x=0 \therefore 2^x=1$ (B)若 (x,y,z) 為此方程組的解，則 $y>0$ (C)若 (x,y,z) 為此方程組的解，則 $y<z$ (D)當 $a \neq -3$ 時，恰有一組 (x,y,z) 滿足此方程組 (E)當 $a = -3$ 時，滿足此方程組的所有解 (x,y,z) 會在一條直線上 平行

設 $2^x=p$ $3^y=q$ $5^z=r$ 得一矩陣為
$$\begin{bmatrix} p & -q & r & -1 \\ 2p & q & -r & 4 \\ 2p & 3q & ar & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3p & 0 & 0 & 3 \\ 2p & q & -r & 4 \\ 2p & 3q & ar & 8 \end{bmatrix}$$
 代入 p=1 得
$$\begin{cases} 3q-3r=2 \\ 3q+ar=6 \end{cases}$$
 若 a=-3 則無解

4. (BE) 已知聯立方程式 $\begin{cases} x - y - z = 3 \\ x + y + 3z = 1 \\ 5x + y + az = b \end{cases}$ ，則下列選項哪些正確？ (A) 若 $a = 7$ ，則聯立方程式有無窮多組解或無解 (B) 若聯立方程式無解，則 $b \neq 9$ (C) 若 $b = 9$ ，則聯立方程式恰有一解 如果 $a \neq 7$ (D) 若 $b = 9$ ，則聯立方程式必為無窮多組解 如果 $a = 7$ (E) 若 $a \neq 7$ ，則聯立方程式恰有一解

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \text{整理後可得此矩陣} & 2 & -1 & 0 & 5 \\ & 0 & 0 & a-7 & b-9 \end{array}$$

四、填充題(5 小題，每格 6 分，共 30 分)

1. 設圓方程式為 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ ，且過三點 $A(4, -2)$ 、 $B(5, 5)$ 、 $C(-2, 6)$ ，試求 $(d, e, f) = \underline{(-2, -4, -20)}$ 。
- 求 ab 方程後，透過斜率相乘 $= -1$ 的特性並代入 ab 中點得方程 $-x + 15 = 7y$
同理做 ac 得 $3x + 5 = 4y$ 做聯立方程後得圓心為 $(1, 2)$
 $1 = \frac{-d}{2}$ $2 = \frac{-e}{2}$ 得 $d = -2$ $e = -4$ 以三點任意一點做畢氏定理，求半徑 $= 5$
 $\sqrt{\frac{d^2 + e^2 - 4f}{4}} = 5$ 代入 d 、 e 得 $f = -20$
2. 設矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ 經過列運算後得 $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \end{bmatrix}$ ，則數對 (a, b) 為 $\underline{(4, 1)}$ 。
- 第三列 $-($ 第一列 $+)$ 第二列 $= 0 \ 0 \ 1 \ 1$ 第二列 $-2x$ 第一列得 $0 \ 7 \ 7 \ 14$ $\therefore a = 2$
(第二列 $/7$) $+2x$ 第三列 $= 0 \ 1 \ 1 \ 4$
3. 已知二次函數 $f(x)$ 過點 $A(1, -6)$ 、 $B(2, 1)$ 、 $C(-3, 26)$ ，則 $f(x) = \underline{-3x^2 - 2x - 7 = y}$ 。

將點代入 $a(x-k)^2 + h = y$ 經整理後得 $a = 3 \ k = \frac{1}{3} \ h = -\frac{22}{3}$
展開後得 $3x^2 - 2x - 7 = y$

4. 已知數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ 的每一項都是不超過 3 的正整數，且 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20} = 37$ ，
 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{20}^2 = 79$ ，則 $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_{20}^3 = \underline{187}$ 。

設數字為 3 的有 x 個 數字為 2 的有 y 個 數字為 1 的有 z 個

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ 3x + 2y + z = 37 \\ 9x + 4y + z = 79 \end{cases} \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 3 & 2 & 1 & 37 \\ 9 & 4 & 1 & 79 \end{array} \text{ 得 } x=4 \ y=9 \ z=7 \text{ 故 } 27x+8y+z=187$$

5. 空間中四平面的方程式如下： $x + y + z = 0$ ， $x + y - z = -6$ ， $x - y + z = 8$ ， $x - y - z = a$ ，其中 a 為實數，若此四平面共交一點時，則 a 的值為 $\underline{2}$ 。

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & 1 & 8 \end{array} \text{ 得 } x=1 \ y=-4 \ z=3 \text{ 代入 } x - y - z = a \text{ 得 } a=2$$

五、計算題(1 小題，每格 6 分，共 6 分)

1. 對矩陣 $\begin{bmatrix} 3 & a & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & c \\ 2 & b & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 作列運算若干次後得到 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，求實數 a 、 b 、 c 的值。

第一列 $-$ 第三列得 $a - b = 3$
第二列 $+$ 第一列 $-2x$ 第三列得 $a - 2b + 3 = 1 \ c + 1 = 4$
所以 $a = 8 \ b = 5 \ c = 3$

六、混合題(2 小題，每格 6 分，共 24 分)

1. 已知二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的圖形過 $(1, 2020)$ 、 $(2, -1010)$ 、 $(3, 2026)$ 三點，有一位拉先生說他有一個方法可以算出這個二次函數，他的方法是假設 $f(x) = A(x-1)(x-2) + B(x-2)(x-3) + C(x-3)(x-1)$ 來算出。
- (1) 試問下列何者正確？(多選題) DE
(A) $A = 2026$ (B) $A = 2020$ (C) $B = 2020$ (D) $B = 1010$ (E) $C = 1010$
- (2) 今日拉先生想要算 $f(x)$ 除以 $x-5$ 所得的餘式，請你幫他把餘式算出來。(非選擇題)

代入 1 可得 $2B = 2020 \ B = 1010$
代入 2 可得 $-C = -1010 \ C = 1010$
代入 3 可得 $2A = 2026 \ A = 1013$

代入 5 可得 $f(5) = 12A + 6B + 8C = 26296$
 26296

2.「沉默螺旋」是由德國政治學家伊莉莎白．諾爾－諾伊曼（Elisabeth Noelle－Neumann）於1974年提出的一個政治學領域的概念，內容是：「如果人們覺得自己的觀點是公眾中的少數，將不願意說出自己的看法；反之，如果覺得自己與多數人的意見一致，則更會大聲的說出來。形成少數的聲量愈來愈小，多數的聲量愈來愈大的趨勢。」

在做民調時，往往因為個人隱私、涉及非法行為或與一般傳統觀念有所衝突，造成受訪者會拒絕回答或隱瞞事實，造成調查結果有所偏差。為了避免發生上述的問題，在做調查時可採用隨機作答（Randomized Response Technique）的方法來蒐集資料，其做法如下：

某高中要調查所有同學對於畢業旅行遊玩路線的意願，但不想讓大家知道彼此間做的選擇，所以請同學依照下表回答A、B即可，最後依調查結果，利用聯立方程式可求得各路線的支持人數。

路線 生日月份	甲	乙
1～8月	A	B
9～12月	B	A

比如調查結果顯示選擇A的人數有600人、選擇B的人數有400人，可假設選擇甲路

線有 x 人、乙路線有 y 人，則可按照生日月份的占比列出方程組

$$\begin{cases} \frac{8}{12}x + \frac{4}{12}y = 600 \\ \frac{4}{12}x + \frac{8}{12}y = 400 \end{cases}$$

後，解得 x 、 y 之值。

- (1) 求上列方程式之 x 值為（單選題） B
(A) 1000 (B) 800 (C) 400 (D) 200。

$$\begin{cases} 2x + y = 1800 \\ x + 2y = 1200 \end{cases}$$

x=800 y=200

- (2) 若某國總統大選的候選人有小史、菲菲與老王三人，而某民調公司想採用隨機作答的方法進行民調，設計表格如下：

候選人 星座編號	小史	菲菲	老王
①～③	A	B	C
④～⑦	C	A	B
⑧～⑫	B	C	A

星座編號：①牡羊座 ②金牛座 ③雙子座 ④巨蟹座 ⑤獅子座 ⑥處女座 ⑦天
秤座 ⑧天蠍座 ⑨射手座 ⑩摩羯座 ⑪水瓶座 ⑫雙魚座

若該公司最後調查結果，有效問卷有1440份，其中有488個A、476個B、476個C，求小史的支持率。（非選擇題）

$$\frac{3}{12}A + \frac{4}{12}C + \frac{5}{12}B = 479$$

$$\frac{479}{1440} \times 100\% = \frac{2395}{72}\% \text{ (約 33.26\%)}$$

4-2 & 4-3 反矩陣

班級：____201____ 座號：____10____ 姓名：張霆威

總分	29
----	----

一、是非題(2 小題，每格 3 分，共 6 分)

- (O) 若二矩陣 A 、 B 可作加法運算，則 $2A$ 、 $3B$ 必可作減法運算。
- (X) 若三矩陣 A 、 B 、 C 滿足 $AB=C$ ，且 $A^{-1}=B$ 存在，則 $B=CA^{-1}$ 。

$B=CB$ C 被限定

二、單選題(3 小題，每格 3 分，共 9 分)

- (E) 關於矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$ ，下列選項何者正確？ (A) A 有 2 列 3 行 (3 列 2 行) (B) A 是 2×3 矩陣 (3X2) (C) A 是 3×2 矩陣 (D) 第 (2,1) 元是 b (E) 第 (3,2) 元是 f
- (C) 若 $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 且 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} X + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ，下列選項何者正確？ (A) $a=33$ (B) $b=11$ (C) $c=-28$ (D) $d=-13$
 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $a=11$ $b=-13$ $c=-28$ $d=33$
- (D) 若矩陣滿足 $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log_2 a & \log_2 a + \log_2 b \\ 3 \log_2 c & 1 \end{bmatrix}$ ，且 a 、 b 、 c 均大於 0，則 $a+b+c$ 之值為何？ (A) 5 (B) 13 (C) 17 (D) 28 (E) 32
 $a=8$ $b=16$ $c=4$

三、多選題(3 小題，每格 3 分，共 9 分)

- (ABCD) 設 $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ 滿足 $a_{ij} = \begin{cases} i, & i > j \\ j, & i \leq j \end{cases}$ ，下列何者為真？ (A) $a_{32} = 3$ (B) $a_{22} = 2$ (C) $a_{43} = 4$ (D) 所有元素和為 50 (E) 所有元素和為 100
 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

(BCD) 下列敘述何者正確？ (A) 設 A 、 B 為兩矩陣，則 A 、 B 一定(皆為 $m \times n$) 可以作加法運算 (B) 若 $A \square B$ 兩矩陣可相加，則 $3A \square 2B$ 一定可以相減 (C) 若 $A \square B \square C$ 三矩陣列、行數均相等，則 $A+(B+C)=(A+B)+C$ (D) 設 A 為矩陣，則 $4A=A+A+A+A$ (E) 零矩陣 $O_{2 \times 3} = O_{3 \times 2}$ (行列數不同)

(BCD) A 是 2×2 方陣，設 $A^2 = AA$ ， $A^3 = AAA$ ，以此類推。已知 $A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，若有 a 、 b 使得 $A^4 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ，下列敘述何者正確？

(A) $a=-3$ (B) $b=2$ (C) $A^2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (D) $A = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix}$
 設 A 為 $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ 帶入矩陣 $\begin{cases} p-q=1 \\ p+q=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} r-s=1 \\ r+s=1 \end{cases}$ $p=0$ $q=-1$ $r=1$ $s=0$
 $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \therefore a=3$ $b=2$ $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

四、填充題(4 小題，每格 5 分，共 20 分)

- 設 $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ 且 $a_{ij} = i + 2j - 1$ ，則 A 的所有元的總和為 40。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

加起來是 40

- 設 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ， $A^3 - 3A^2 + I_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ ，求 $a+b+c = 47$ 。

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 125 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{bmatrix}$$

$$a+b+c = -5+3+55 = 47$$

- 若 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ，則 $y = -2.9$ 。

$$\text{解後式得三個三元一次方程，解完得 } \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ -3.1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$\text{帶入前式得三個三元一次方程，解完得 } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ -2.9 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

$$4. \text{若 } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & \cdots \\ 2 & 3 & 8 & 15 & \cdots \\ 5 & 6 & 7 & 14 & \cdots \\ 10 & 11 & 12 & 13 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}_{n \times n}, \text{ 若 } a_{mn} = 1000, \text{ 則數對 } (m, n) = \underline{\quad (25, 32) \quad}.$$

從矩陣中可以發現該矩陣為 $\begin{bmatrix} 1 & \cdots & n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ n^2 - 2(n-1) & \cdots & n^2 - (n-1) \end{bmatrix}$

$\sqrt{1000} \cong 31.6$ 得知 $n=32$ $n^2=1024$ 得知 $m=25$

五、計算題(5 小題，每格 5 分，共 40 分)

1.

(1) 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ 滿足 $4X + 5A = 2(X - B)$, 求矩陣 X 。

(2) 已知矩陣 X 、 Y 滿足 $3X + 2Y = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 9 & 22 \end{bmatrix}$, $2X + Y = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 13 \end{bmatrix}$, 求矩陣 X 與 Y 。

(1) $4X + \begin{bmatrix} 10 & -20 \\ -10 & 30 \end{bmatrix} = 2X + \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ 8 & -19 \end{bmatrix}$

(2) 解聯立得 $x = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}$ $y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 18 & -5 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

2. 經實驗證實，每一隻好菌 1 秒可以吃掉一隻壞菌並增生為原來的兩倍，但同時間內剩餘的壞菌每 1 秒亦會繁殖為原來的兩倍。例如：現有 1 隻好菌、10 隻壞菌，1 秒後好菌變成 2 隻、壞菌 18 隻，2 秒後好菌有 4 隻、壞菌 32 隻，以此類推。設 n 秒後好菌

數以 a_n 表示，壞菌數以 b_n 表示，且設 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$, 試求矩陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 。

代入 2 秒情況 $\begin{bmatrix} 4 \\ 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 18 \end{bmatrix}$ 得 $2a + 18b = 4$ $2c + 18d = 32$

代入 3 秒情況 $\begin{bmatrix} 8 \\ 56 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 32 \end{bmatrix}$ 得 $4a + 32b = 8$ $4c + 32d = 56$

解聯立得 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

$Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

3. 已知二階方陣 A 滿足 $A \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, 求 A 。

設 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

代入前式得 $5a + 3b = 4$ $5c + 3d = 7$

代入前式得 $8a + 5b = 3$ $8c + 5d = 2$

解聯立得 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -17 \\ 29 & -46 \end{bmatrix}$

4. 設二階方陣 A 、 B 中， $A = [a_{ij}]$, a_{ij} 為 1, 2, 3, 4 中的一個數， $B = [b_{ij}]$, b_{ij} 為 0, 1, -1 中的一個數，則

(1) 使 A 的行列式值為奇數的 A 有多少個？

(2) 使 B 的行列式值為 0 的 B 有多少個？

(1)

A 有三種情況分別為

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} (1 \times 4 - 2 \times 3) = -2$ (偶) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} (2 \times 4 - 4 \times 3) = 5$ (奇) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} (3 \times 4 - 2 \times 1) = 10$ (偶)

每種情況分別有 2X2 (上下對調) X2 (第一行跟第二行對調) = 8 所以共 8 種

(2)

B 有三種情況分別為 2 個 0.1.-1

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} (0 \times 1 + 0 \times -1) = 0$ (僅這種答案為零)

每種情況分別有 2X2 (上下對調) X2 (第一行跟第二行對調) = 8 所以共 8 種

5. 設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

(1) $A^2 = aA + bI_2$, 求實數 a 、 b 。

(2) 利用上題，化簡 $A^5 - 6A^4 - A^3 + 2A^2 - 13A - I_2$ 。

(1)

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5a & 3a \\ 2a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 31 & 18 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5a+b & 3a \\ 2a & a+b \end{bmatrix}$$
$$3a=18 \quad a=6$$
$$a+b=7 \quad b=1$$

✓ 417

(2)

$$A^3(A^2-6A-1)+2A^2-13A-1 \quad (I=1)$$
$$2(A^2-6A-1)-A+1$$
$$1-A$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

六、混合題(3 小題，每格 4 分，共 24 分)

1. 設 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 試回答下列問題：

(1) 已知 A^n 為零矩陣，則最小正整數 n 值為何？(單選題)

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4 (E)5 (直接乘不解釋)

(2) 已知 $(I-A)^4 = aI + bA + cA^2$ ，則 $a+b+c = \underline{\quad 3 \quad}$ 。(非選擇題)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ b+c & b & a \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ b+c & b & a \end{bmatrix}$$
$$a=1 \quad b=-4 \quad c=6$$

2. 某大學數學系的微積分課程總成績計算方式如下：

(一) 期中考考 2 次，分別占總成績的 25%。

(二) 期末考占總成績的 30%。

(三) 平時成績占總成績的 20%。

當期末要結算成績時，助教要計算多位學生的總成績，於是他想利用矩陣的乘法來計算，首先他先將學生每個項目的成績列出，列出方式如下：

姓名	期中考(I)	期中考(II)	期末考	平時成績
甲	70	75	75	90
乙	60	70	70	85
丙	100	90	95	95
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$$\begin{bmatrix} 70 & 75 & 75 & 90 \\ 60 & 70 & 70 & 85 \\ 100 & 90 & 95 & 95 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

再轉換成矩陣的型式呈現：

(1) 若要計算總成績，需將上面的矩陣乘上下面哪一個矩陣後，才能呈現每位同學的總成績？(單選題)

(A) $\begin{bmatrix} 25\% & 25\% & 30\% & 20\% \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 20\% & 25\% & 25\% & 30\% \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 20\% \\ 25\% \\ 25\% \\ 30\% \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 25\% \\ 25\% \\ 30\% \\ 20\% \end{bmatrix}$ 。

(2) 若大明前兩次期中考分別考了 10 分與 25 分，小華考了 30 分及 50 分，利用矩陣乘法計算後，討論兩人總成績是否能及格(總成績 ≥ 60 分)，若能及格，則期末考至少要考幾分？(四捨五入至整數位) (非選擇題)

$$\begin{bmatrix} 10 & 25 & a \\ 30 & 50 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25\% \\ 25\% \\ 30\% \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 + 6.25 + 0.3a \\ 7.5 + 15 + 0.3a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.75 + 0.3a \\ 22.5 + 0.3a \end{bmatrix}$$

If 老師很討厭他們，平常成績都打 0 分 那他們都會被當掉

If 老師很愛他們，平常成績都打 100 分，大明還是會被當掉(8.75+30+20=58.75)

•) • 大華只要考 58.75 分就不會被當掉

3. 在網路發達的現在，大量的資訊都在網路上流通，而資訊的安全性是現今大家非常重視的一個環節。對於資料的加密及解密稱之為「密碼學」，而密碼學必須包含四個特性：

(一) 機密性 (Confidentiality)。

(二) 完整性 (Integrity)。

(三) 身分認證 (Authentication)。

(四) 不可否認性 (Non - Repudiation)。

在基礎密碼學中，有兩種基本的加解密的方式，其中「非對稱性加密」是較為安全的一種加解密方式，其運作原理如下：

每位使用者都有一對金鑰，公開金鑰 (Public Key) (簡稱公鑰) 及私密金鑰

(Private Key) (簡稱私鑰)，在訊息傳送時，可用公鑰加密、私鑰解密，也可私鑰加密、公鑰解密。若兩個使用者要互相傳送訊息，則需在傳送前，先將各自的公鑰提供給對方，傳送方要傳送訊息時，先用接收方的公鑰將其加密後傳送，接收方收到加密訊息後，即可用自己的私鑰將其解密得知原始訊息。由於加密與解密使用的鑰匙不同，所以就算有心人士能取得公鑰，也無法用來解密，故非對稱式加密其安全性高。

78

若丁丁與拉拉想用矩陣乘法來實作非對稱式加密，比如原始資料矩陣為 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ，丁丁經由拉拉提供的公鑰矩陣 $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 加密後，可得加密資料矩陣為 $\begin{bmatrix} 17 & 25 & 33 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ ，並將其傳給拉拉，則拉拉再用自己的私鑰將其解密後得到原始資料矩陣為 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ 。試問：

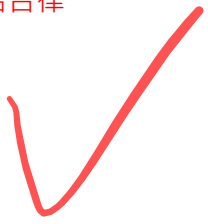
(1) 在上面利用矩陣乘法做非對稱式加密是有破綻的，當拉拉提供公鑰矩陣 $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 給丁丁後，丁丁可以自行推出拉拉的私鑰矩陣，請問拉拉的私鑰矩陣為（單選題）

- (A) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ 。

設私鑰矩陣為 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 得 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 & 25 & 33 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ 得 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

(2) 丁丁對於資料的加密與解密有個疑問：
「如果我用拉拉的公鑰，對原始資料矩陣連續作兩次加密後，拉拉是否能用自己的私鑰，連續作兩次解密得到原始資料矩陣呢？」
請就丁丁的疑問討論丁丁的想法是否正確？並說明其原因。（非選擇題）

可。因為矩陣乘法具有結合律



4-3 反矩陣 & 轉移矩陣

班級： 201 座號： 10 姓名： 張霆威

一、是非題(8 小題，每格 2 分，共 16 分)

- (O) 已知 A 、 B 、 C 均為二階方陣，若 $AB = AC$ ，且 A 的行列式值 $\Delta \neq 0$ ，則 $B = C$ 。
- (O) 已知 A 、 B 均為二階方陣，若 AB 的行列式值 $\Delta \neq 0$ ，則 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 。
- (O) 二階方陣 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 。
- (X) 設 A 、 B 是轉移矩陣，則 $\frac{1}{2}(A+B)$ 是轉移矩陣。
- (O) 若 A 、 B 為轉移矩陣，則 $\frac{1}{2}(A^2+B^2)$ 亦為轉移矩陣。
- (X) 若 A 、 B 、 C 皆為二階方陣，且 $AB = AC$ ，且 $A \neq O_2$ ，則 $B = C$ 。 $\neq I_2$
- (O) 設 A 是轉移矩陣，則 A^2 亦為轉移矩陣。
- (X) 若三矩陣 A 、 B 、 C 滿足 $AB = C$ ，且 A^{-1} 存在，則 $B = CA^{-1}$ 無交換律

二、多選題(5 小題，每格 5 分，共 25 分)

- (ABD) 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 滿足 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ 。請選出正確的選項： (A) A 的行列式 (值) 為 6 (B) $A^2 = 5A - 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (D) $A \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$ (E) $[1 \ 1]A = [5 \ 7]$
 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 代入後可得 $\begin{cases} a+b=5 \\ c+d=2 \end{cases} \begin{cases} a+2b=7 \\ c+2d=4 \end{cases}$ 解聯立可得 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
 (A) $ad-bc=6$
 (B) $A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ $5A = \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \div \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$
 (C) $\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$
 (D) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$
 (E) $[1 \ 1] \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [3 \ 4]$

- (AB) 下列哪些是轉移矩陣？ (A) $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}$ (B) $\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$ (行和不為 1) (D) $\begin{bmatrix} -0.2 & 0.7 \\ 1.2 & 0.3 \end{bmatrix}$ (不可有負元素)
- (A) 設 $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ 9 & b \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ c & d \end{bmatrix}$ 。已知 $AB = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ -2 & 15 \end{bmatrix}$ 且 A 的行列式之值為 2，試問下列哪些選項是正確的？ (A) $9a-4b=-2$ (B) $ac=-24$ (C) $d=-15$ (D) $\begin{bmatrix} b & -a \\ -9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & a \\ 9 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
 代入後可得 $\begin{cases} 24+ac=3 \\ 54+bc=-2 \end{cases} \begin{cases} 28+ad=10 \\ 63+bd=15 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} ac=-21 \\ bc=-56 \\ ad=-18 \\ bd=-48 \end{cases} \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} = \frac{3}{8} \therefore 8a=3b$
 $\begin{cases} 4b-9a=2 \\ 8a=3b \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a=\frac{6}{5} \\ b=\frac{16}{5} \\ c=\frac{-35}{2} \\ d=-15 \end{cases}$
- (BD) A 是 2×2 方陣，設 $A^2 = AA$ ， $A^3 = AAA$ ，以此類推。已知 $A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，若有 a 、 b 使得 $A^4 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ，下列敘述何者正確？
 (A) $a=-3$ (B) $b=2$ (C) $A^2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (D) $A = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix}$
 $A = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix}$ $A^2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
 $A^4 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \therefore a=3 \ b=2$
- (ACDE) 假設王同學從家裡到學校有甲、乙兩路線可以走。他決定若某一天走甲路上學，則次日一定走乙路上學；若某一天走乙路上學，則次日以丟一枚公正硬幣出現的正、反面決定走甲路線或乙路線，已知第一天是丟公正硬幣的正反面決定，則他上學選擇走甲路之機率，下列何者為真？ (A) 第一天為 $\frac{1}{2}$ (B) 第二天為 $\frac{1}{2} \frac{1}{4}$ (C) 第三天為 $\frac{3}{8}$ (D) 第四天為 $\frac{5}{16}$ (E) 第五天為 $\frac{11}{32}$

第二天 $\begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{bmatrix}$ 第三天 $\begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.625 \end{bmatrix}$
 第四天 $\begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3125 \\ 0.6875 \end{bmatrix}$ 第五天 $\begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3125 \\ 0.6875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.34375 \\ 0.65625 \end{bmatrix}$

三、填充題(10 小題，每格 5 分，共 60 分)

1.設 x, c 為實數，方陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & x \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & x \end{bmatrix}$ 。已知 A 的反方陣恰好是 B 的 c 倍（其中 $c \neq 0$ ），則數對 $(x, c) = \underline{\hspace{1cm}} (3, \frac{1}{13}) \hspace{1cm}$ 。（請化為最簡分數）

$$\frac{1}{3x+4} \begin{bmatrix} x & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & x \end{bmatrix} \quad x = 3 \quad c = \frac{1}{3x+4} = \frac{1}{13}$$

2.地方上張安與李平兩位角逐鄉長，結果張安得票率 **55%**，李平得票率 **45%**，由張安勝選。民調機構預測，如果下任鄉長仍由張安與李平兩人競選，選民相同且每一張票都是有效票，則本屆支持張安的選民將有 **25%**倒向支持李平，而本屆支持李平的選民將有 **10%**倒向支持張安。若描述上述現象的轉移矩陣為 A ，則 A 的行列式的絕對值為 **65%**。（請化為最簡分數）

$$\begin{bmatrix} 75\% & 10\% \\ 25\% & 90\% \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 55\% \\ 45\% \end{bmatrix} \qquad 75\% \times 90\% - 25\% \times 10\% = 65\%$$

3.已知 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是一個轉移矩陣，並且其行列式（值）為 $\frac{5}{8}$ ，則 $a + d = \underline{\hspace{1cm}} -\frac{13}{8} \hspace{1cm}$ 。（化為最簡分數）

$$\begin{cases} C = 1 - a \\ b = 1 - d \end{cases} \quad ad - bc = ad - (1 - d - a + ad) = a + d - 1 = \frac{5}{8} \quad \therefore a + d = \frac{13}{8}$$

4.設 $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ， X 為 2×3 矩陣且滿足 $AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ ，求矩陣 $X = \underline{\hspace{1cm}} \begin{bmatrix} 13 & -2 & 11 \\ 32 & -6 & 27 \end{bmatrix} \hspace{1cm}$ 。

$$\text{設 } x = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5a - 2d = 1 \\ -2a + d = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 5b - 2e = 2 \\ -2b + e = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 5c - 2f = 1 \\ -2c + f = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 13 \\ b = -2 \\ c = 11 \\ d = 32 \\ e = -6 \\ f = 27 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 & 11 \\ 32 & -6 & 27 \end{bmatrix}$$

5.已知矩陣 $A^5 = \begin{bmatrix} 32 & 31 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則 $A = \underline{\hspace{1cm}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \hspace{1cm}$ 。

$$A^5 = A^3 A^2 \quad \begin{bmatrix} 32 & 31 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 8a + 7c = 32 \\ c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 8b + 7d = 31 \\ d = 1 \end{cases}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^3 = A^2 A^1 \quad \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4p + 3r = 8 \\ r = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4q + 3s = 7 \\ s = 1 \end{cases} \quad A^1 = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.設 A 、 B 二箱中， A 箱內有兩球一黑一白， B 箱內有一白球。甲乙二人輪流取球，每次先由甲自 A 箱內任取一球，放入 B 箱內，再由乙自 B 箱內任取一球，放入 A 箱內，這樣稱為一局。那麼

- (1) 當第一局結束時， A 箱內兩球為一黑一白之機率為 **75%**。
 (2) 當第三局結束時， A 箱內兩球為一黑一白之機率為 **67.1875%**。

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{一黑一白} \\ \text{兩白} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}^4 \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.671875 \\ 0.328125 \end{bmatrix}$$

7. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $AX - X = 9(A + I)$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 則二階方陣 $X = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}}}$ 。

$$(A - I)X = 9(A + I) \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 27 \\ 27 & 18 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 3r = 18 \\ 3p + r = 27 \end{cases} \quad \begin{cases} 3s = 27 \\ 3q + s = 18 \end{cases}$$

$$X = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

8. 設 $A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ 3 & \beta \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$,

(1) 若 $AB = BA$, 則數對 $(\alpha, \beta) = \underline{\underline{(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})}}$ 。

(2) 若 $A = A^{-1}$, 則數對 $(\alpha, \beta) = \underline{\underline{(\frac{5}{3}, 2)}}$ 。

(1)

$$\begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ 3 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ 3 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} p = 4 - 2\alpha = 1 & \alpha = \frac{3}{2} \\ r = 6 - 2\beta = -1 & \beta = \frac{7}{2} \end{cases}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ 3 & \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{2\beta - 3\alpha} \begin{bmatrix} \beta & -\alpha \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2\beta - 3\alpha} = -1 \quad \beta = 2 \quad \text{得} \alpha = -1$$

9. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$, a, b, c 為實數且 $\det(A) = -2$, 求 $\det(A - A^{-1}) = \underline{\underline{\frac{-1}{2}}}$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -a & -b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad A - A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \quad \therefore -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -0.5$$

10. $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 若 $\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}^8 = aI + bJ$, 求數對 $(a, b) = \underline{\underline{(1, \frac{1}{3})}}$

J 的第二列第一行的 b 倍加 I 的第二列第一行的 a 倍=J 的第二列第一行的 b 倍 得 $b = \frac{1}{3}$

代回第一列第一行 得 $a = 1$

$$\begin{bmatrix} 86 & 85 & 85 \\ 85 & 86 & 85 \\ 85 & 85 & 86 \end{bmatrix}$$

四、混合題(1 小題，每格 5 分，共 10 分)

1. 世界各地的電視公司在製作電視節目時，最在意的數據不外乎是收視率，當收視率高時，電視公司才能藉此獲得龐大的廣告收益。在收視率的計算上，許多國家都採用 AC 尼爾森公司所提供數據來進行計算，而收視率的計算公式如下：

$$\text{收視率}(\%) = \frac{\text{收看某一人數的節目}}{\text{觀眾總人數}} \times 100\%$$

比如當觀眾總人數有 21707000 人，收視率 0.1 表在節目播出期間，平均約有 21707 人收看該節目。

某國的大城市 T 市中，觀眾總人數為 1000000 人，在晚間八點有兩個非常受歡迎的電視節目 A、B，其中 A 目前的收視率為 4.8、而 B 目前的收視率為 3.2。根據調查，兩個節目的總收看人數長年維持不變，但兩節目個別的收看人數，每個月都會有固定的變動模式：

(一) 目前收看 A 節目的觀眾，下個月有 80% 的人會繼續觀看，而 20% 的人會改收看 B 節目。

(二) 目前收看 B 節目的觀眾，下個月有 70% 的人會繼續觀看，而 30% 的人會改收看 A 節目。

試問：

(1) 在 T 市中，A、B 兩個節目的收視人數總共有多少人？（單選題）

(A) 32000 人 (B) 48000 人 (C) 80000 人 (D) 100000 人。

$$(4.8\% + 3.2\%) \times 1000000 = 80000$$

(2) 若經過長時間的變動後，兩個節目的收看人數已達穩定狀態，此時收看 A 節目的人數約為多少人？（非選擇題）

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 8\% - x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 8\% - x \end{bmatrix} \quad x = 4.8\% \quad 1000000 \times 4.8 = 48000$$

Ans：48000 人

4-4 平面上的線性變換與二階方陣

班級：____201____ 座號：____10____ 姓名：____張靈威____

一、 多選題：

(每題 8 分，共 16 分。錯一個 6 分，錯兩個 2 分，錯 3 個以上 0 分)

1. A 和 B 是兩個二階方陣。 A 在平面上的作用是對直線 $L: y + \sqrt{3}x = 0$ 的

鏡射，已知 $AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ，則下列哪些選項正確？____12345____。

$$(1) A = \begin{bmatrix} \cos 240^\circ & \sin 240^\circ \\ \sin 240^\circ & -\cos 240^\circ \end{bmatrix}$$

$$(2) AB = BA$$

$$(3) A + B = O$$

(4) AB 是旋轉矩陣

(5) B 是鏡射矩陣

$$B = \begin{bmatrix} -\cos 240 & -\sin 240 \\ -\sin 240 & \cos 240 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \cos 180 & -\sin 180 \\ -\sin 180 & \cos 180 \end{bmatrix}$$

2. 已知 $A_\theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$ ，下列哪些選項正確？____134____。

(1) A_θ 為旋轉鏡射變換

$$(2) A_{0^\circ} = I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(3) (A_\theta)^{-1} = A_\theta$$

$$(4) A_\theta^{2015} = A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A_\theta = A_\theta$$

(5) $A_\alpha A_\beta$ 表示旋轉 $(\beta - \alpha)$ 之旋轉矩陣 $(2\alpha - 2\beta)$

二、 填充題：(每題 8 分，共 88 分)

1. 在坐標平面上，將 $P(-2, 2)$ 沿 y 軸推移 x 坐標的 3 倍，得點 Q ，求 Q 點坐標為____(-2, -4)____。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

2. 先對直線 $y = x$ 作鏡射，再以原點為中心逆時針旋轉 30° ，則可利用矩陣

表示此兩種變換之合成變換為____ $\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ____。(化至最簡)

$$\begin{bmatrix} \cos 30 & -\sin 30 \\ \sin 30 & \cos 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3. 已知圓 $C: x^2 + y^2 = 25$ ，

(1) 將圓 C 的 x 坐標、 y 坐標分別伸縮 3 倍與 $\frac{1}{2}$ 倍，再沿 y 軸推移 x 坐標之 2 倍後之曲線所圍面積為____ $\frac{75}{2}\pi$ ____。

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x' \\ x' + \frac{1}{2}y' \end{bmatrix} \quad (3x')^2 + (x' + \frac{1}{2}y')^2 = 25$$

$$13x'^2 + 4x'y' + y'^2 = 25$$

$$\text{面積比} = |\det(BA)| = \frac{3}{2} \quad \therefore 25\pi \cdot \frac{3}{2} = \frac{75}{2}\pi$$

(2) 若 C 經矩陣 A 作伸縮變換(伸縮倍數為正)後，得橢圓 $9x^2 + 4y^2 = 36$ ，則

矩陣 A 為____ $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ ____

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1 \quad \left(\frac{x'}{2}\right)^2 + \left(\frac{y'}{3}\right)^2 = 1 \quad \therefore \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

(3) 將 Γ 沿 x 軸推移 y 坐標的 -2 倍得圓 C ，則圖形 Γ 的方程式為 $x'^2 + 4x'y' + 5y'^2 = 25$ 。

(請化至最簡)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad x' = (x - 2y) \quad y' = y \quad \text{帶入得 } x'^2 - 4x'y' + 5y'^2 = 25$$

4. 設 A 為二階方陣，若點 $(-2, 1)$ 與 $(1, 2)$ 經矩陣 A 變換後的像分別為 $(-2, 7)$ 與 $(6, -1)$ ，求直線 $2x + 3y = 4$ 在 A 的變換下所得圖形之方程式為 $11x' + 2y' = 32$ 。

$$\begin{aligned} \text{設 } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \begin{cases} -2a + b = -2 \\ a + 2b = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} -2c + d = 7 \\ c + 2d = -1 \end{cases} &\quad \therefore A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad A^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{|-3 \cdot 2 - 2 \cdot 1|} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' - 2y' \\ 3x' + 2y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{代入得 } 11x' + 2y' = 32$$

5. 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ 所定義的線性變換，將直線 $L: y = ax + b$ 變換至直線本身，則直線 L 之方程式為 $-2x = y$ 或 $x = y$ 。(兩解)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x + 2y \\ 4x + 3y \end{bmatrix} \quad a(x + 2y) + b = 4x + 3y \\ \frac{a-4}{3-2a}x + \frac{b}{3-2a} &= y \quad \frac{a-4}{3-2a} = a \quad a = -2 \text{ or } 1 \end{aligned}$$

$$\frac{b}{-2} = \frac{b}{1} \quad b = 0$$

6. 試求 $\Gamma: (x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$ 之圖形繞原點逆時針旋轉 30° 後，再對直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ 鏡射所得圖形的方程式為 $(x - \sqrt{3} - 2)^2 + (y - 1 + 2\sqrt{3})^2 = 9$ 。

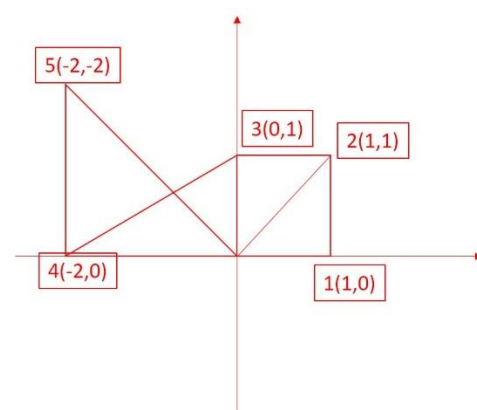
$$\begin{bmatrix} \cos 60 & \sin 60 \\ \sin 60 & -\cos 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 30 & -\sin 30 \\ \sin 30 & \cos 30 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} + 2 \\ 1 - 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{方程變為 } (x - \sqrt{3} - 2)^2 + (y - 1 + 2\sqrt{3})^2 = 9$$

7. 平面坐標中，若 $O(0, 0)$ 、 $A(-4, 2)$ ，且 $OABCDE$ 為正六邊形，若 B 在第二象限，則 C 點坐標為 $(-4 - 2\sqrt{3}, 2 + 4\sqrt{3})$ 。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \cos 60 & \sin 60 \\ -\sin 60 & \cos 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 - \sqrt{3} \\ 1 + 2\sqrt{3} \end{bmatrix} \\ \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} \quad 2 \begin{bmatrix} -2 - \sqrt{3} \\ 1 + 2\sqrt{3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 - 2\sqrt{3} \\ 2 + 4\sqrt{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

8. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，且點 $P_n(x_n, y_n)$ ， n 為正整數，滿足 $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ ，設 O 為原點且 $\Delta OP_n P_{n+1}$ 的面積為 S_n ，求 $\frac{S_{n+1}}{S_n} = 2$ 。



9. 設 a, b, c 為正實數， $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ \sqrt{3}a & c \end{bmatrix}$ ，若橢圓 $4x^2 + y^2 = 1$ 經 A 變換成以原點為圓心，1為半徑之圓，求序對 (a, b, c) 為 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ 。

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ \sqrt{3}a & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax - by \\ \sqrt{3}ax + cy \end{bmatrix} \text{ 代入得}$$

$$(ax - by)^2 + (\sqrt{3}ax + cy)^2 = 1$$

$$\begin{cases} 4a^2 = 4 \\ b = \sqrt{3}c \\ b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \therefore (a, b, c) = (1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$$