

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Andalucía · PAU 2012 · Extraordinaria · Desarrollo razonado de las dos opciones

Opción A

Ejercicio 1 · Optimización de la producción

El beneficio máximo es 17 250 € y se alcanza fabricando 75 camisas y 300 pantalones. A continuación comprobamos que esa combinación es la óptima.

Se pide elegir las cantidades x de camisas e y de pantalones que maximizan el beneficio $B = 30x + 50y$. Las restricciones de tela, botones, cremalleras y no negatividad son:

$$2x + 3y \leq 1050, \quad 5x + 2y \leq 1250, \quad y \leq 300, \quad x, y \geq 0.$$

El máximo de una función lineal en una región poligonal se alcanza en un vértice. Los vértices factibles son $(0, 0)$, $(250, 0)$, $(150, 250)$, $(75, 300)$, $(0, 300)$. Para los dos puntos de intersección:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1050, \quad 5x + 2y = 1250 \implies (x, y) = (150, 250), \\ 2x + 3(300) &= 1050 \implies (x, y) = (75, 300). \end{aligned}$$

Evaluamos el beneficio en cada vértice:

Vértice	Sustitución en $B = 30x + 50y$	Beneficio
$(0, 0)$	$30 \cdot 0 + 50 \cdot 0$	0 €
$(250, 0)$	$30 \cdot 250 + 50 \cdot 0$	7 500 €
$(150, 250)$	$30 \cdot 150 + 50 \cdot 250$	17 000 €
$(75, 300)$	$30 \cdot 75 + 50 \cdot 300$	17 250 €
$(0, 300)$	$30 \cdot 0 + 50 \cdot 300$	15 000 €

Conclusión: el beneficio máximo es 17 250 euros, fabricando 75 camisas y 300 pantalones.

Ejercicio 2 · Continuidad y derivabilidad

Los valores buscados son $a = 6$ y $b = 6$; así la función es derivable en $x = 1$. Comprobamos primero continuidad y después las derivadas laterales.

Se buscan a y b para que la función sea derivable en $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax - 7, & x < 1, \\ 4x - b, & x \geq 1. \end{cases}$$

La derivabilidad exige continuidad e igualdad de derivadas laterales. Igualamos los valores en $x = 1$:

$$f(1^-) = a - 8, \quad f(1) = 4 - b, \quad a - 8 = 4 - b \implies a + b = 12.$$

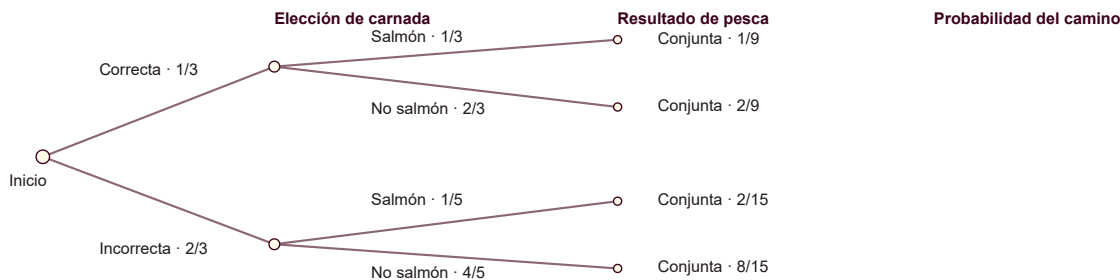
Las derivadas laterales son $f'_-(x) = -2x + a$ y $f'_+(x) = 4$. En $x = 1$:

$$a - 2 = 4 \implies a = 6, \quad b = 12 - a = 6.$$

Conclusión: $a = 6$ y $b = 6$; con esos valores coinciden tanto la función como sus derivadas laterales en $x = 1$.

Ejercicio 3 · Probabilidad total y Bayes

Se pregunta por la probabilidad de pescar salmón y, después, por la probabilidad de haber elegido la carnada correcta sabiendo que se pescó salmón. Sean C «carnada correcta» y S «pescar salmón»; $P(C) = 1/3$, $P(S | C) = 1/3$, $P(S | \bar{C}) = 1/5$.



Se multiplican las probabilidades de las ramas de cada camino; para la probabilidad total de salmón se suman sus dos caminos incompatibles.

a) Probabilidad de pescar salmón

La probabilidad pedida de pescar salmón es $11/45$. Se obtiene sumando los dos caminos incompatibles del árbol que terminan en S ; multiplicamos las probabilidades de las ramas de cada camino:

$$P(S) = P(C)P(S | C) + P(\bar{C})P(S | \bar{C}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{9} + \frac{2}{15} = \frac{11}{45} \approx 0,2444.$$

Por tanto, la probabilidad de pescar salmón es $11/45$, aproximadamente **24,44%**.

b) Probabilidad de carnada correcta dado que se pescó salmón

La probabilidad de haber elegido la carnada correcta, sabiendo que se pescó salmón, es $5/11$. La calculamos con Bayes porque conocemos S y se pregunta por C ; la probabilidad conjunta es el producto de las dos primeras ramas:

$$P(C | S) = \frac{P(C \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{11}{45}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{45}{11} = \frac{5}{11} \approx 0,4545.$$

Así, si se pescó salmón, la probabilidad de haber usado la carnada correcta es $5/11$, aproximadamente **45,45%**.

Ejercicio 4 · Contraste unilateral para una proporción

No se puede afirmar que la medida aumentara la contratación: con los datos muestrales no se rechaza H_0 . Lo comprobamos con el contraste unilateral al 5 %.

Se contrasta si la medida elevó la proporción de contratación desde $p_0 = 0,23$, con $n = 470$, $X = 110$ y $\alpha = 0,05$. Las hipótesis son $H_0 : p \leq 0,23$ y $H_1 : p > 0,23$.

Bajo la hipótesis frontera, el error típico de la proporción muestral es:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0,23 \cdot 0,77}{470}} \approx 0,01941.$$

Para una prueba unilateral al 5 %, $z_{0,95} = 1,645$. La región crítica satisface:

$$\hat{p} > 0,23 + 1,645 \cdot 0,01941 \approx 0,26193 \iff X > 470 \cdot 0,26193 = 123,11, \quad X \geq 124.$$

En la muestra, $\hat{p} = 110/470 \approx 0,2340$ y $z = (0,2340 - 0,23)/0,01941 \approx 0,21 < 1,645$.

Conclusión: no se rechaza H_0 ; la muestra no aporta evidencia suficiente para afirmar que la medida aumentó la contratación.

Opción B

Ejercicio 1 · Matrices de compras e ingresos

Los ingresos trimestrales por cliente son 3 660 euros, 4 700 euros y 3 120 euros; el total es 11 480 euros. Los calculamos sumando las matrices mensuales y multiplicando por el vector de precios.

Las filas representan tres clientes y las columnas dos productos. Sumamos sus compras de enero, febrero y marzo componente a componente:

$$E = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 18 & 10 \\ 6 & 14 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 14 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

La matriz trimestral y el vector de precios son 80 euros y 100 euros:

$$Q = E + F + M = \begin{bmatrix} 27 & 15 \\ 15 & 35 \\ 14 & 20 \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} 80 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

La multiplicación (Qp) da los ingresos por cliente:

$$Qp = \begin{bmatrix} 27 \cdot 80 + 15 \cdot 100 \\ 15 \cdot 80 + 35 \cdot 100 \\ 14 \cdot 80 + 20 \cdot 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3660 \\ 4700 \\ 3120 \end{bmatrix} \text{ euros.}$$

El total es $3660 + 4700 + 3120 = 11,480$ euros.

Conclusión: las facturaciones son 3 660 €, 4 700 € y 3 120 €; el total asciende a 11 480 €.

Ejercicio 2 · Crecimiento de una mancha

La superficie viene dada, para $t \geq 0$, por:

$$f(t) = \frac{11t + 20}{t + 2} = 11 - \frac{2}{t + 2}.$$

a) Superficie inicial

La superficie inicial es 10 km^2 . Se obtiene sustituyendo $t = 0$ en la función:

$$f(0) = \frac{20}{2} = 10 \text{ km}^2.$$

Al inicio, la mancha ocupa $10, \text{km}^2$.

b) Monotonía

La superficie crece estrictamente para todo $t \geq 0$, porque su derivada es positiva. Derivamos para comprobarlo:

$$f'(t) = \frac{11(t + 2) - (11t + 20)}{(t + 2)^2} = \frac{2}{(t + 2)^2} > 0 \quad (t \geq 0).$$

La superficie crece estrictamente para todo $t \geq 0$.

c) Límite a largo plazo

A largo plazo, la superficie se aproxima a 11 km^2 desde abajo. Lo comprobamos calculando el límite cuando $(t \rightarrow \infty)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 11 \text{ km}^2.$$

Se aproxima a **11, km²** desde abajo, sin alcanzar ese valor en un tiempo finito.

Ejercicio 3 · Unión e intersección de sucesos

Las probabilidades de la unión son 0,85 si los sucesos son incompatibles, 0,70 si son independientes y 0,75 si $P(A|B) = 0,40$. Verificamos cada caso con la fórmula de la unión.

Con $P(A) = 0,60$ y $P(B) = 0,25$, usamos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Condición	Cálculo de $P(A \cap B)$	Cálculo de $P(A \cup B)$
Incompatibles	0	$0,60 + 0,25 = 0,85$
Independientes	$0,60 \cdot 0,25 = 0,15$	$0,60 + 0,25 - 0,15 = 0,70$
$P(A B) = 0,40$	$0,40 \cdot 0,25 = 0,10$	$0,60 + 0,25 - 0,10 = 0,75$

En cada caso sustituimos la intersección correspondiente en la fórmula de la unión.

Conclusión: las probabilidades de la unión son **0,85, 0,70 y 0,75**, respectivamente.

Ejercicio 4 · Tamaño muestral y error

El menor tamaño que cumple la condición es $n = 28$. Lo obtenemos imponiendo que el error sea inferior a 450 g y redondeando al entero siguiente.

Se pide el menor tamaño muestral que hace que el error al estimar la media sea inferior a **450, g**. Con $\sigma = 1200, \text{g}$ y confianza del 95 %, $z_{0,975} = 1,96$.

El error máximo es $E = z\sigma/\sqrt{n}$. Imponemos $E < 450$ y despejamos n :

$$\frac{1,96 \cdot 1200}{\sqrt{n}} < 450 \iff n > \left(\frac{1,96 \cdot 1200}{450} \right)^2 \approx 27,32.$$

Conclusión: el menor entero mayor que **27,32** es $n = 28$; con 28 observaciones el error queda por debajo de 450 g.