

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Junio de 2006 · Convocatoria ordinaria

Resolución razonada de los cuatro problemas de cada ejercicio. En el examen se eligen tres problemas de un ejercicio; aquí se desarrollan todos.

Ejercicio A

Problema 1 · Rentabilidad de los terrenos

Sean u , i y r las rentabilidades, en forma decimal, de los terrenos urbanos, industriales y rústicos. La ganancia de cada constructora es la suma de las ganancias de sus tres inversiones. Expresando las cantidades en miles de euros, obtenemos

$$\begin{cases} 500u + 250i + 250r = 137,5, \\ 125u + 250i + 125r = 56,25, \\ 100u + 100i + 200r = 40. \end{cases}$$

Al simplificar las ecuaciones quedan $2u + i + r = 0,55$, $u + 2i + r = 0,45$ y $u + i + 2r = 0,40$. Restando la segunda de la primera, $u - i = 0,10$, así que $u = i + 0,10$. La segunda da $3i + r = 0,35$ y la tercera, al sustituir u , da $2i + 2r = 0,30$. De aquí $i + r = 0,15$, por lo que $2i = 0,20$ y

$$i = 0,10, \quad r = 0,05, \quad u = 0,20.$$

Urbano: 20%; industrial: 10%; rústico: 5%.

Problema 2 · Estudio de una función cúbica

La función $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ es polinómica y, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$. Factorizamos para localizar los cortes con los ejes:

$$f(x) = (x - 1)^2(x + 3).$$

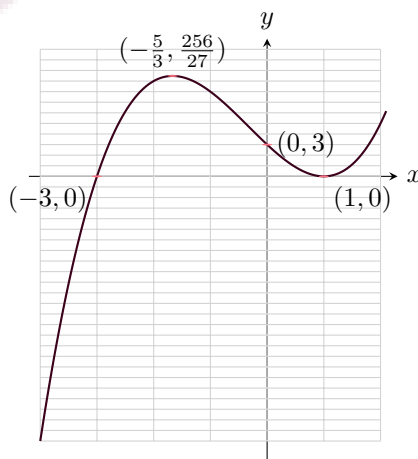
Corta el eje X en $(-3, 0)$ y $(1, 0)$ (en $x = 1$ la raíz es doble), y el eje Y en $(0, 3)$. Para estudiar la monotonía, usamos el signo de la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = (3x + 5)(x - 1), \quad f'(x) = 0 \iff x = -\frac{5}{3} \text{ o } x = 1.$$

El signo de f' es positivo en $(-\infty, -\frac{5}{3})$, negativo en $(-\frac{5}{3}, 1)$ y positivo en $(1, \infty)$. Por ello hay un máximo local en $x = -\frac{5}{3}$ y un mínimo local en $x = 1$. Sus ordenadas son

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{256}{27}, \quad f(1) = 0.$$

Representamos la curva con estos puntos, los cortes y los intervalos de crecimiento:



Problema 3 · Beneficio a lo largo del tiempo

El beneficio, en miles de euros, es $B(x) = \frac{25x}{x^2+16}$, donde $x \geq 0$ son los años transcurridos. El denominador nunca se anula, así que el dominio contextual es $[0, \infty)$. Derivamos para encontrar posibles extremos:

$$B'(x) = \frac{25(16 - x^2)}{(x^2 + 16)^2}.$$

En el dominio, $B'(x) > 0$ si $0 \leq x < 4$ y $B'(x) < 0$ si $x > 4$; por tanto, el beneficio crece hasta el cuarto año y luego decrece. Su máximo es

$$B(4) = \frac{100}{32} = \frac{25}{8} = 3,125 \text{ miles de euros} = 3125 \text{ €}.$$

Como $25x \geq 0$ y $x^2 + 16 > 0$ para todo $x \geq 0$, el beneficio nunca es negativo.

El máximo se alcanza a los 4 años y es 3125 €; la empresa no tiene pérdidas.

Problema 4 · Probabilidades de dos sucesos

Sean A y B los sucesos del enunciado. Primero calculamos $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,4 = 0,6$.

a) Para hallar $P(B)$ usamos la fórmula de la unión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Despejando,

$$P(B) = 0,9 - 0,6 + 0,2 = 0,5.$$

b) La probabilidad condicionada de A sabiendo que ocurre B es

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4.$$

c) El suceso A se descompone en los casos incompatibles $A \cap B$ y $A \cap \bar{B}$. Por tanto,

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,6 - 0,2 = 0,4.$$

d) Por las leyes de De Morgan, $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$, luego

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,2 = 0,8.$$

$$P(B) = 0,5; \quad P(A | B) = 0,4; \quad P(A \cap \bar{B}) = 0,4; \quad P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,8.$$

Ejercicio B

Problema 1 · Sistema resuelto por Cramer

La matriz de coeficientes y los términos independientes corresponden al sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = -6, \\ x + z = 5, \\ 2x - y = 11. \end{cases}$$

Para aplicar Cramer calculamos primero el determinante de la matriz de coeficientes. Si es distinto de cero, el sistema tiene solución única:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Sustituyendo sucesivamente cada columna por los términos independientes,

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -6 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 11 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 15, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & 0 \end{vmatrix} = -25, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 11 \end{vmatrix} = 10.$$

Por la regla de Cramer, $x = \Delta_x/\Delta = 3$, $y = \Delta_y/\Delta = -5$ y $z = \Delta_z/\Delta = 2$.

$$x = 3, \quad y = -5, \quad z = 2.$$

Problema 2 · Coste mínimo de crudo

Sean x e y los barriles de crudo ligero y pesado. Las necesidades mínimas de gasolina 95, gasolina 98 y gasoil se traducen, respectivamente, en

$$0,3x + 0,1y \geq 26300, \quad 0,4x + 0,2y \geq 40600, \quad 0,2x + 0,5y \geq 29500, \quad x, y \geq 0.$$

Multiplicando por 10, 5 y 10 para simplificar:

$$3x + y \geq 263000, \quad 2x + y \geq 203000, \quad 2x + 5y \geq 295000.$$

El coste $C = 70x + 65y$ se minimiza en un vértice. Las intersecciones interiores de las restricciones activas son $(60000, 83000)$ y $(90000, 23000)$; los otros dos vértices están sobre los ejes. Comparamos el coste en los cuatro puntos:

(x, y)	$(0, 263000)$	$(60000, 83000)$	$(90000, 23000)$	$(147500, 0)$
C (€)	17095000	9595000	7795000	10325000

Comprar 90000 barriles ligeros y 23000 pesados; coste mínimo: 7795000 €.

Problema 3 · Continuidad e integral

En la función definida a trozos, cada expresión es continua dentro de su intervalo; solo hay que comprobar las uniones $x = -2$ y $x = 1$. En $x = -2$,

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} (3x + 10) = 4, \quad f(-2) = (-2)^2 = 4, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} x^2 = 4,$$

por lo que es continua. En $x = 1$, el límite por la izquierda vale 1, mientras que $f(1) = \frac{1+3}{2} = 2$; los límites laterales no coinciden y hay una discontinuidad de salto. En los extremos -3 y 3 los límites laterales dentro del intervalo coinciden con el valor de la función. Así, es continua en $[-3, 3] \setminus \{1\}$.

Para el apartado b), una primitiva de $2x^3 - 3x + 2$ es $F(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{3x^2}{2} + 2x$. Aplicamos el teorema fundamental del cálculo:

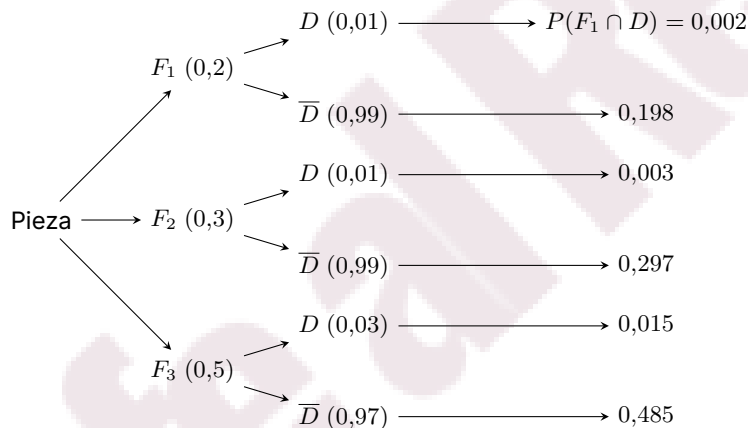
$$\int_2^3 (2x^3 - 3x + 2) dx = F(3) - F(2) = 33 - 6 = 27.$$

Continua en $[-3, 3] \setminus \{1\}$;

$$\int_2^3 (2x^3 - 3x + 2) dx = 27.$$

Problema 4 · Control de calidad

Sean F_1, F_2, F_3 las fábricas y D el suceso «pieza defectuosa». Las proporciones de producción son 0,2, 0,3 y 0,5; las probabilidades de defecto condicionadas a cada fábrica son 0,01, 0,01 y 0,03. En el árbol se multiplican las probabilidades de cada camino:



Sumando las tres rutas de pieza correcta obtenemos $0,198 + 0,297 + 0,485 = 0,98$. Para invertir la condición en el apartado b), aplicamos Bayes:

$$P(F_3 | D) = \frac{P(F_3 \cap D)}{P(D)} = \frac{0,015}{0,002 + 0,003 + 0,015} = \frac{3}{4}.$$

$$P(\text{pieza correcta}) = 0,98, \quad P(F_3 | D) = \frac{3}{4}.$$