

Modelo 6 de 2007

Soluciones desarrolladas · PAU Andalucía

Opción A · Ejercicio 1

Integramos dos veces y usamos las condiciones de la tangente en $x = 0$. De $f''(x) = x^2 - 1$ se obtiene $f'(x) = x^3/3 - x + C_1$. La recta tangente $y = 1$ en $x = 0$ impone $f'(0) = 0$ y $f(0) = 1$, es decir, $C_1 = 0$ y $C_2 = 1$. Por tanto,

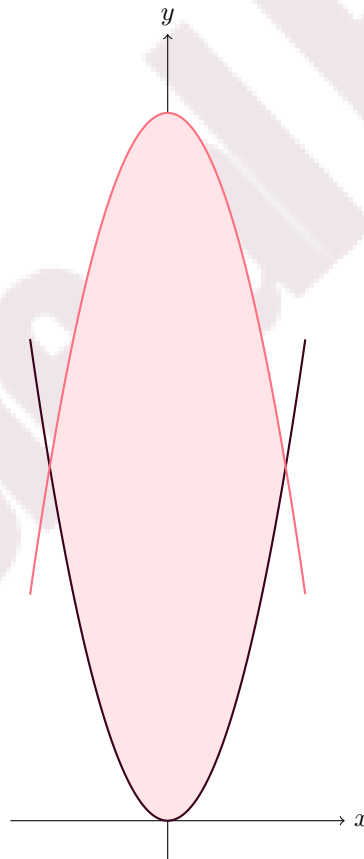
$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + 1.$$

Opción A · Ejercicio 2

Los puntos de corte cumplen $x^2 = -x^2 + 2\beta^2$, así que $x = \pm\beta$. Entre ellos, la parábola g queda por encima de f y el área vale

$$A = \int_{-\beta}^{\beta} (2\beta^2 - 2x^2) dx = \frac{8}{3}\beta^3.$$

Al imponer $A = 72$, resulta $\beta^3 = 27$. Como $\beta > 0$, $\beta = 3$. La región queda entre las curvas desde $x = -3$ hasta $x = 3$:



Opción A · Ejercicio 3

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda - 2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(A - 2I) = (\lambda - 2)(1 - \lambda^2).$$

El determinante se anula para $\lambda = -1, 1, 2$. Para $\lambda = -2$,

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & -4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

La multiplicación por $A - 2I$ da la identidad.

Opción A · Ejercicio 4

La perpendicular al plano tiene como dirección su normal $n = (2, 2, -1)$. Por $P = (1, 0, -1)$,

$$(x, y, z) = (1, 0, -1) + t(2, 2, -1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para hallar la proyección H de P sobre el plano, sustituimos P en la ecuación: $2(1) + 2(0) - (-1) - 6 = -3$. Como $|n|^2 = 9$, el desplazamiento normal hasta el plano es $-(-3)n/9 = n/3$. Así, $H = P + n/3 = (5/3, 2/3, -4/3)$. El simétrico es $P' = 2H - P$, luego

$$P' = \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3} \right).$$

Opción B · Ejercicio 1

Sean x el lado de la base cuadrada y h la altura. La capacidad impone $x^2 h = 500$, por tanto $h = 500/x^2$ para $x > 0$. Al no haber tapa, el área es

$$S(x) = x^2 + 4xh = x^2 + \frac{2000}{x}.$$

Derivando, $S'(x) = 2x - 2000/x^2 = 0$ da $x^3 = 1000$, luego $x = 10$ m y $h = 5$ m. Además $S''(x) = 2 + 4000/x^3 > 0$, por lo que es un mínimo. Las dimensiones óptimas son $10 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ de base y 5 m de altura.

Opción B · Ejercicio 2

a) Como $f'(x) = 2x$, la tangente en $x = 1$ es $y - 1 = 2(x - 1)$, es decir, $y = 2x - 1$.

b) El recinto queda limitado por la parábola, la tangente y el eje X . La parábola corta el eje en 0 y la tangente en $1/2$; entre 0 y $1/2$ la región está entre el eje y x^2 , y entre $1/2$ y 1 está entre la parábola y la tangente (se tocan en 1). Por ello,

$$A = \int_0^{1/2} x^2 dx + \int_{1/2}^1 (x^2 - (2x - 1)) dx = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}.$$

Opción B · Ejercicio 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \det A = -(m - 1)^2.$$

Si $m \neq 1$, el determinante es distinto de cero y el sistema es SCD. Para $m = 1$, las ecuaciones son $x + y + z = 1$, $y - z = -1$ y $x + 2y = 0$; la tercera se obtiene combinando las dos primeras, así que el rango de A y el de la ampliada son ambos $2 < 3$. Es SCI. Tomando $y = t$, se obtiene $x = -2t$ y $z = t + 1$:

$$(x, y, z) = (-2t, t, t + 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción B · Ejercicio 4

Los cortes del plano con los ejes son $X = (3, 0, 0)$, $Y = (0, 3, 0)$ y $Z = (0, 0, -6)$. El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados:

$$\overrightarrow{XY} = (-3, 3, 0), \quad \overrightarrow{XZ} = (-3, 0, -6), \quad |\overrightarrow{XY} \times \overrightarrow{XZ}| = 27.$$

$$\text{Así, } A = \frac{27}{2}.$$

La recta tiene dirección $(2, -1, 2)$, cuyo producto escalar con el normal del plano $(2, 2, -1)$ es $4 - 2 - 2 = 0$; es paralela al plano. Tomamos el punto $(1, -1, 0)$ de la recta y aplicamos la fórmula punto-plano:

$$d = \frac{|2(1) + 2(-1) - 0 - 6|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 2.$$