

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Junio de 2008 · Convocatoria ordinaria

Se desarrollan los ocho problemas para que pueda estudiarse toda la propuesta; en el examen se elige uno de los ejercicios y tres de sus problemas.

Ejercicio A

Problema 1 · Plazas de garaje

Sean x, y, z las plazas vendidas en A, B y C. El total y la relación entre A y C dan $x + y + z = 65$ y $x = \frac{3}{2}z$. Como el beneficio por plaza es de 2.000 €, 4.000 € y 6.000 €, respectivamente, la igualdad de beneficios indicada en el enunciado se escribe

$$6000z = 2000x + 4000y \iff 3z = x + 2y.$$

Sustituimos $x = \frac{3}{2}z$ en esta igualdad: $3z = \frac{3}{2}z + 2y$, de donde $y = \frac{3}{4}z$. Por tanto,

$$\frac{3}{2}z + \frac{3}{4}z + z = 65 \implies \frac{13}{4}z = 65 \implies z = 20.$$

Así, $x = 30$ e $y = 15$.

Se vendieron 30 plazas en A, 15 en B y 20 en C.

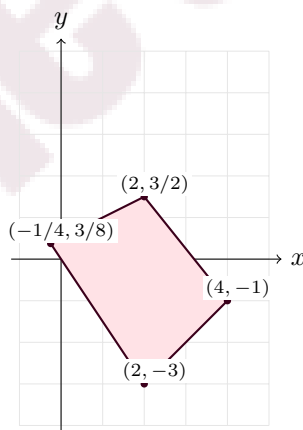
Problema 2 · Región factible y mínimo

Las cuatro restricciones son $3x + 2y \geq 0$, $x - 2y \geq -1$, $5x + 4y \leq 16$ y $x - y \leq 5$. Para representar la región trazamos sus rectas frontera; al resolver sus intersecciones y comprobar las desigualdades, los vértices factibles son

$$\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right), \quad \left(2, \frac{3}{2}\right), \quad (4, -1), \quad (2, -3).$$

La región es un polígono convexo. Una función lineal alcanza sus extremos en alguno de sus vértices, así que evaluamos $f(x, y) = 3x - y$:

(x, y)	$\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)$	$\left(2, \frac{3}{2}\right)$	$(4, -1)$	$(2, -3)$
$3x - y$	$-\frac{9}{8}$	$\frac{9}{2}$	13	9



$$f_{\min} = -\frac{9}{8}, \text{ alcanzado en } \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right).$$

Problema 3 · Extremos absolutos y continuidad

a) Como la función es polinómica, está definida y es continua en $[1, 4]$. Los extremos absolutos pueden aparecer en los extremos del intervalo o en puntos interiores con $f'(x) = 0$. Tenemos

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3), \quad f(1) = 5, \quad f(3) = 1, \quad f(4) = 5.$$

La derivada es negativa en $(1, 3)$ y positiva en $(3, 4)$; por ello, $x = 3$ es mínimo. La comparación de los tres valores incluye ambos extremos del intervalo.

$$\min f = 1 \text{ en } x = 3; \quad \max f = 5 \text{ en } x = 1 \text{ y } x = 4.$$

b) En los dos tramos la función es polinómica. Solo hay que comprobar el punto de unión $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2(1) + 3 = 5 = f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x).$$

f es continua en todo $[0, 4]$.

Problema 4 · Probabilidades e independencia

Sean A y B los sucesos del enunciado. La probabilidad condicionada permite hallar primero $P(B)$:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0,2, \quad P(A \cap B) = 0,1 \implies P(B) = 0,5.$$

Usando $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, obtenemos $P(A) = 0,7 - 0,5 + 0,1 = 0,3$. Para que fueran independientes tendría que cumplirse $P(A \cap B) = P(A)P(B)$; aquí $0,1 \neq 0,3 \cdot 0,5 = 0,15$. Además,

$$P(\bar{A} \cup B) = 1 - P(A \cap \bar{B}) = 1 - [P(A) - P(A \cap B)] = 1 - (0,3 - 0,1) = 0,8.$$

$P(A) = 0,3, \quad P(B) = 0,5, \quad P(\bar{A} \cup B) = 0,8; \quad A$ y B no son independientes.

Ejercicio B

Problema 1 · Ecuación matricial

La ecuación es $AX + I = AB^T$. Como $\det A = 2 \neq 0$, podemos multiplicar por A^{-1} a la izquierda:

$$X + A^{-1} = B^T \implies X = B^T - A^{-1}.$$

Con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Problema 2 · Estudio de una función racional

Para $f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$, el denominador no puede anularse; por tanto $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. El numerador se anula solo en $x = 0$, así que el único corte con los ejes es $(0, 0)$. Al acercarnos a $x = -2$ y $x = 2$, el denominador tiende a cero y el numerador a 4; hay asíntotas verticales $x = -2$ y $x = 2$. En el infinito,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{4-x^2} = -1,$$

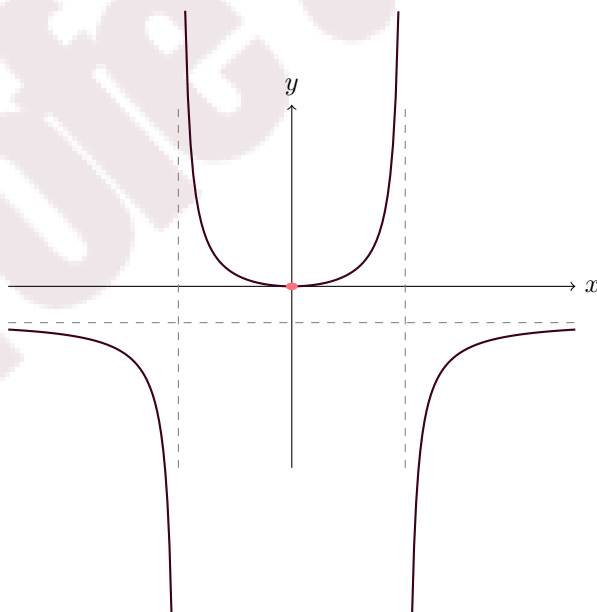
de modo que $y = -1$ es asíntota horizontal. Para la monotonía,

$$f'(x) = \frac{8x}{(4-x^2)^2}.$$

El denominador es positivo en el dominio y el signo de f' es el de x . Separamos también las asíntotas al indicar intervalos:

I	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
f'	-	-	+	+
f	decrece	decrece	crece	crece

En $x = 0$ cambia de decreciente a creciente, luego hay un mínimo local $f(0) = 0$.



$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}; \quad (0, 0); \quad x = \pm 2, \quad y = -1; \quad \text{mínimo local } (0, 0).$$

Problema 3 · Coste unitario

Si fabricar x unidades cuesta $C(x) = x - 2\sqrt{x} + 20$, el coste por unidad es el coste total dividido entre la producción: $c(x) = C(x)/x$, con $x > 0$. Por tanto,

$$c(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{20}{x}, \quad c'(x) = \frac{1}{x^{3/2}} - \frac{20}{x^2} = \frac{\sqrt{x} - 20}{x^2}.$$

El denominador es positivo y el numerador cambia de negativo a positivo en $\sqrt{x} = 20$, es decir, $x = 400$. Así, el coste unitario disminuye antes y aumenta después:

$$c(400) = 1 - \frac{2}{20} + \frac{20}{400} = \frac{19}{20} = 0,95 \text{ €}.$$

El coste unitario mínimo es 0,95 € al fabricar 400 unidades.

Problema 4 · Probabilidad total y Bayes

Sea J el suceso «aprobar en junio». Se tiene $P(J) = 0,6$. Quienes no aprueban en junio son quienes se presentan en septiembre, y de ellos aprueba el 80%. Como los casos «aprueba en junio» y «suspende junio y aprueba septiembre» son incompatibles,

$$P(\text{aprobar}) = 0,6 + (1 - 0,6) \cdot 0,8 = 0,92.$$

La probabilidad condicionada de haber aprobado en junio sabiendo que aprobó en alguna convocatoria es

$$P(J \mid \text{aprobar}) = \frac{P(J)}{P(\text{aprobar})} = \frac{0,6}{0,92} = \frac{15}{23}.$$

$$P(\text{aprobar}) = 0,92, \quad P(J \mid \text{aprobar}) = \frac{15}{23}.$$