

Julio de 2018 · Convocatoria extraordinaria

Se resuelven las dos opciones. En cada apartado identificamos los datos, explicamos el método y desarrollamos las operaciones.

Opción A

A.1. Sistema de ecuaciones con parámetro

El sistema del enunciado es

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ (a - 1)y + z = 0, \\ x + ay + (a - 1)z = a. \end{cases}$$

Queremos averiguar para qué valores de a es compatible y resolverlo para $a = 1$ y $a = 0$. Aplicaremos el teorema de Rouché–Frobenius: el sistema es compatible exactamente cuando la matriz de coeficientes y la matriz ampliada tienen el mismo rango.

La matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a - 1 & 1 \\ 1 & a & a - 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos su determinante. Restamos la primera fila a la tercera, operación que no cambia el determinante:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a - 1 & 1 \\ 0 & a - 1 & a - 1 \end{vmatrix} = (a - 1)^2 - (a - 1) = (a - 1)(a - 2).$$

Caso 1: $a \neq 1, 2$. Como $\det A \neq 0$, $\text{rg}(A) = 3$. La matriz ampliada tiene tres filas, así que su rango no puede superar 3; contiene a A , por lo que también tiene rango 3. Por Rouché–Frobenius,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 = \text{número de incógnitas},$$

de modo que el sistema es **compatible determinado (SCD)**.

Para hallar la solución, restamos la primera ecuación de la tercera y después restamos la segunda ecuación a la nueva tercera:

$$\begin{aligned} (a - 1)y + (a - 1)z &= a - 1, \\ (a - 2)z &= a - 1. \end{aligned}$$

Como en este caso $a \neq 2$,

$$z = \frac{a - 1}{a - 2}.$$

De la segunda ecuación original, para $a \neq 1$,

$$(a - 1)y = -z = -\frac{a - 1}{a - 2} \implies y = -\frac{1}{a - 2}.$$

Finalmente, usando $x + y = 1$,

$$x = 1 - y = 1 + \frac{1}{a - 2} = \frac{a - 1}{a - 2}.$$

Por tanto, cuando $a \neq 1, 2$,

$$(x, y, z) = \left(\frac{a-1}{a-2}, -\frac{1}{a-2}, \frac{a-1}{a-2} \right).$$

Caso 2: $a = 1$. Sustituimos el valor del parámetro en el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ z = 0, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

La tercera ecuación repite la primera. Por ello, $\text{rg}(A) \leq 2$. El menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

(filas primera y segunda, columnas x y z) demuestra que $\text{rg}(A) = 2$. La misma dependencia se conserva en la matriz ampliada; por tanto, $\text{rg}(A^*) = 2$. Así,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3,$$

por Rouché–Frobenius el sistema es **compatible indeterminado (SCI)**. Tomando $y = t$, con $t \in \mathbb{R}$, resulta

$$x = 1 - t, \quad y = t, \quad z = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Caso 3: $a = 2$. El sistema queda

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ y + z = 0, \\ x + 2y + z = 2. \end{cases}$$

En la matriz de coeficientes, la tercera fila es la suma de las dos primeras; el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

demuestra que $\text{rg}(A) = 2$. Sin embargo, al sumar las dos primeras ecuaciones se obtiene $x + 2y + z = 1$, mientras que la tercera exige $x + 2y + z = 2$. Equivalentemente, las filas primera más segunda y tercera de la matriz ampliada producen una contradicción. Además, el menor ampliado

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

demuestra que $\text{rg}(A^*) = 3$. Como los rangos no coinciden, el sistema es **incompatible (SI)**.

En conclusión, el sistema es compatible para

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{2\};$$

es SCD si $a \neq 1, 2$, SCI si $a = 1$ y SI si $a = 2$.

Solución para $a = 0$. Como $0 \neq 1, 2$, podemos usar el caso SCD. También lo comprobamos directamente:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ -y + z = 0, \\ x - z = 0. \end{cases}$$

Las dos últimas ecuaciones dan $z = y$ y $x = z$, así que $x = y = z$. Sustituyendo en la primera, $2x = 1$, luego

$$x = y = z = \frac{1}{2}.$$

A.2. Rectas y planos

Se dan

$$\pi: x - y + z - 3 = 0, \quad s: \begin{cases} x - 2y = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad A = (1, 1, 1).$$

El vector normal del plano π es $n_\pi = (1, -1, 1)$. Parametrizamos s resolviendo sus ecuaciones: si $y = t$, entonces $x = 2t$ y $z = 0$. Por tanto,

$$s: \begin{cases} x = 2t, \\ y = t, \\ z = 0, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

con vector director $d_s = (2, 1, 0)$.

a) Recta por A , que corta a s y es paralela a π . Sea $Q = (2t, t, 0)$ el punto de corte con s . El vector director de la recta buscada será

$$\overrightarrow{AQ} = Q - A = (2t - 1, t - 1, -1).$$

Una recta es paralela a un plano cuando su vector director es perpendicular al vector normal del plano. Aplicamos el producto escalar:

$$\overrightarrow{AQ} \cdot n_\pi = 0 \implies (2t - 1) - (t - 1) - 1 = 0 \implies t = 1.$$

Así, el punto de corte es $Q = (2, 1, 0)$ y un vector director es $Q - A = (1, 0, -1)$. La recta, en forma paramétrica, es

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1, \\ z = 1 - \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Comprobación: para $\lambda = 1$ se obtiene $Q = (2, 1, 0) \in s$, y $(1, 0, -1) \cdot (1, -1, 1) = 0$, por lo que la recta es paralela al plano.

b) Plano por A , perpendicular a π y paralelo a s . El plano buscado debe contener la dirección $d_s = (2, 1, 0)$. Como sus planos son perpendiculares, sus vectores normales también deben ser perpendiculares. Por tanto, un normal n_σ debe cumplir

$$n_\sigma \cdot d_s = 0, \quad n_\sigma \cdot n_\pi = 0.$$

Un vector perpendicular a ambos se obtiene mediante el producto vectorial:

$$n_\sigma = n_\pi \times d_s = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 2, 3).$$

La ecuación de un plano de normal $(-1, 2, 3)$ que pasa por $A = (1, 1, 1)$ es

$$-(x - 1) + 2(y - 1) + 3(z - 1) = 0,$$

y, en forma general,

$$\sigma: -x + 2y + 3z - 4 = 0.$$

c) Pertenencia de $(3, 2, 1)$. La recta paralela a s que pasa por $(5, 3, 1)$ tiene el mismo vector director $(2, 1, 0)$:

$$t: \begin{cases} x = 5 + 2\lambda, \\ y = 3 + \lambda, \\ z = 1, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Imponemos $y = 2$: $2 = 3 + \lambda \implies \lambda = -1$. Entonces $x = 5 + 2(-1) = 3$ y $z = 1$. Por tanto, $(3, 2, 1) \in t$: el punto sí pertenece a la recta.

A.3. Función e integral

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \cos(\pi x).$$

Su dominio es $\mathbb{R}$: los términos polinómicos están definidos para todo real y el coseno también.

a) Relación entre los coeficientes si $f(1) = 22$. Sustituimos $x = 1$ en la función y usamos $\cos(\pi) = -1$:

$$22 = f(1) = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) \cos(\pi) = a + b - c.$$

Por tanto,

$$a + b - c = 22.$$

b) Condición para que la tangente en $x = 1$ sea horizontal. La pendiente de la tangente es $f'(x)$; una tangente horizontal requiere $f'(1) = 0$. Derivamos usando la regla del producto en $cx \cos(\pi x)$:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \cos(\pi x) - \pi cx \sin(\pi x).$$

Al sustituir $x = 1$, con $\cos \pi = -1$ y $\sin \pi = 0$, obtenemos

$$f'(1) = 3a + 2b - c.$$

La condición pedida es, por tanto,

$$3a + 2b - c = 0.$$

c) Cálculo de $\int_0^1 x \cos(\pi x) dx$. Usamos integración por partes,

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Elegimos $u = x$ y $dv = \cos(\pi x) dx$; así, $du = dx$ y $v = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$. Entonces

$$\begin{aligned} \int x \cos(\pi x) dx &= \frac{x \sin(\pi x)}{\pi} - \int \frac{\sin(\pi x)}{\pi} dx \\ &= \frac{x \sin(\pi x)}{\pi} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi^2} + C. \end{aligned}$$

Evaluamos entre 0 y 1:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cos(\pi x) dx &= \left[\frac{x \sin(\pi x)}{\pi} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi^2} \right]_0^1 \\ &= \left(0 - \frac{1}{\pi^2} \right) - \left(0 + \frac{1}{\pi^2} \right) \\ &= -\frac{2}{\pi^2}. \end{aligned}$$

Opción B

B.1. Operaciones con matrices y determinantes

a) Deducir que $A^2 = A$ y $B^2 = B$. Se conocen las igualdades $AB = A$ y $BA = B$. Usamos la propiedad asociativa de la multiplicación matricial:

$$\begin{aligned} A^2 &= AA = (AB)A = A(BA) = AB = A, \\ B^2 &= BB = (BA)B = B(AB) = BA = B. \end{aligned}$$

En la primera cadena se sustituye AB por A y BA por B ; en la segunda se aplican las mismas hipótesis en el orden correspondiente. Quedan demostradas ambas identidades.

b) Determinar a, b . Las matrices del enunciado son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

Primero imponemos $B^2 = B$:

$$B^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{pmatrix}.$$

Igualando las entradas correspondientes con las de B ,

$$a^2 = a, a+b = 1, b^2 = b.$$

Las dos ecuaciones cuadráticas dan $a, b \in \{0, 1\}$; junto con $a+b = 1$, las posibilidades son $(a, b) = (0, 1)$ y $(1, 0)$.

Ahora aplicamos las dos desigualdades pedidas:

$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es distinta de A exactamente cuando $a \neq 1$, así que debe ser $a = 0$. Además,

$$BA = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que es distinta de B exactamente cuando $b \neq 0$, así que debe ser $b = 1$. La única pareja que satisface las tres condiciones es

$$\boxed{a = 0, b = 1}.$$

c) Determinantes. Sea

$$\det A = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

En el primer determinante solicitado se duplica la primera columna de A . Por la propiedad de sacar un factor común de una columna,

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \det A = 2 \cdot 3 = \boxed{6}.$$

En el segundo, la primera columna es $(x+1, y+1, z+1)^T$. Si C_1, C_2, C_3 son las columnas de A , entonces $(1, 1, 1)^T = C_2 - C_3$; por tanto, la nueva primera columna es $C_1 + C_2 - C_3$. Aplicamos la linealidad del determinante respecto de esa columna:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+2 & 2 & 1 \\ z+3 & 3 & 2 \end{vmatrix} &= \det(C_1 + C_2 - C_3, C_2, C_3) \\ &= \det(C_1, C_2, C_3) + \det(C_2, C_2, C_3) - \det(C_3, C_2, C_3) \\ &= 3 + 0 - 0 = \boxed{3}. \end{aligned}$$

El segundo determinante de la suma vale cero porque contiene dos columnas iguales.

B.2. Recta y plano

La recta se da como intersección de los dos planos:

$$r: \begin{cases} x + y = 3, \\ x + 4y - z = 8. \end{cases}$$

a) Ecuaciones paramétricas de r . Tomamos $x = t$. De la primera ecuación, $y = 3 - t$. Sustituimos en la segunda para despejar z :

$$t + 4(3 - t) - z = 8 \implies z = 4 - 3t.$$

Por tanto,

$$r: \begin{cases} x = t, \\ y = 3 - t, \\ z = 4 - 3t, \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

Su vector director es $d_r = (1, -1, -3)$. Por ejemplo, para $t = 0$ se obtiene el punto $R = (0, 3, 4)$, que satisface ambas ecuaciones: $0 + 3 = 3$ y $0 + 4 \cdot 3 - 4 = 8$.

b) Plano paralelo a r por $P = (5, 0, 1)$ y $Q = (4, 1, 0)$. Dos direcciones contenidas en el plano son la dirección de la recta, $d_r = (1, -1, -3)$, y el vector entre los dos puntos:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-1, 1, -1).$$

Un vector normal al plano es el producto vectorial

$$n_\pi = d_r \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (4, 4, 0).$$

Podemos usar el normal simplificado $(1, 1, 0)$. El plano que pasa por $P = (5, 0, 1)$ es

$$(x - 5) + y = 0,$$

es decir, en forma general,

$$\pi: x + y - 5 = 0.$$

Se comprueba que Q pertenece al plano porque $4 + 1 - 5 = 0$, y que la recta es paralela porque $(1, 1, 0) \cdot (1, -1, -3) = 0$. El punto $R = (0, 3, 4)$ de la recta no está en el plano: $0 + 3 - 5 = -2$; por tanto, la recta no está contenida en el plano, sino que es paralela y distinta.

c) Distancia entre r y π . Al ser paralelos, la distancia entre la recta y el plano es la distancia de cualquier punto de la recta al plano. Usamos

$$d(R, \pi) = \frac{|Ax_R + By_R + Cz_R + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

para el plano $Ax + By + Cz + D = 0$. Con $R = (0, 3, 4)$ y $\pi: x + y - 5 = 0$,

$$d(r, \pi) = d(R, \pi) = \frac{|0 + 3 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{2}}.$$

B.3. Optimización del área de una cartulina

El rectángulo interior R tiene área 600 cm^2 . Llamamos x a su base y h a su altura. Como son longitudes, $x > 0$ y $h > 0$.

a) Área de la cartulina en función de x . El área del rectángulo interior cumple

$$xh = 600 \implies h = \frac{600}{x}, \quad x > 0.$$

Los márgenes laterales añaden $2 + 2 = 4$ cm al ancho; los márgenes superior e inferior añaden $3 + 3 = 6$ cm a la altura. Así, las dimensiones exteriores son $x + 4$ cm y $\frac{600}{x} + 6$ cm. El área se obtiene multiplicando ambas dimensiones:

$$\begin{aligned}
 C(x) &= (x+4) \left(\frac{600}{x} + 6 \right) \\
 &= 600 + 6x + \frac{2400}{x} + 24 \\
 &= 6x + 624 + \frac{2400}{x}, \quad x > 0.
 \end{aligned}$$

b) Base x que minimiza el área. El dominio es $(0, +\infty)$, porque x es una longitud positiva y aparece en el denominador. Derivamos y buscamos los puntos críticos del dominio:

$$C'(x) = 6 - \frac{2400}{x^2}.$$

Igualamos a cero:

$$6 - \frac{2400}{x^2} = 0 \implies 6x^2 = 2400 \implies x^2 = 400 \implies x = \pm 20.$$

Como $x > 0$, solo $x = 20$ pertenece al dominio. Para justificar el sentido del cambio, probamos valores a ambos lados en la derivada:

$$C'(10) = 6 - \frac{2400}{100} = -18 < 0, \quad C'(40) = 6 - \frac{2400}{1600} = \frac{9}{2} > 0.$$

La derivada es negativa en $(0, 20)$ y positiva en $(20, +\infty)$; por tanto, el área decrece hasta $x = 20$ y crece después. Además, $C(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$ y cuando $x \rightarrow +\infty$, así que ese mínimo es absoluto.

x	$(0, 20)$	20	$(20, +\infty)$
$C'(x)$	$-$	0	$+$
$C(x)$	decrece	mínimo	crece

En conclusión,

$$\boxed{x = 20 \text{ cm.}}$$

c) Dimensiones de la cartulina mínima. Para $x = 20$ cm, la altura del rectángulo interior es

$$h = \frac{600}{20} = 30 \text{ cm.}$$

Al añadir los márgenes, el ancho exterior es $20 + 4 = 24$ cm y la altura exterior es $30 + 6 = 36$ cm. Por tanto, las dimensiones de la cartulina son

$$\boxed{24 \text{ cm} \times 36 \text{ cm}},$$

$$\text{y su área mínima es } 24 \cdot 36 = \boxed{864 \text{ cm}^2}.$$