

Modelo 3 de 2005

Límites, áreas, discusión de sistemas, matrices y rectas.

Opción A - Ejercicio 1

Para que el cociente tenga límite finito, el término de primer orden del numerador debe anularse. Como $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$,

$$x - \alpha \sin x = (1 - \alpha)x + \frac{\alpha x^3}{6} + o(x^3).$$

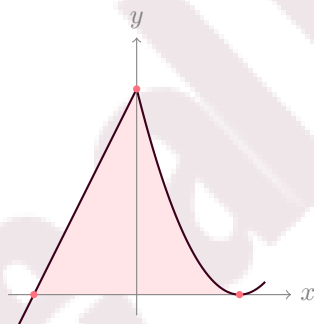
Por tanto, $\alpha = 1$. Con este valor,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{6} + o(x) \right) = \boxed{0}.$$

Opción A - Ejercicio 2

Los cortes con el eje x se obtienen resolviendo cada tramo: $2x + 4 = 0$ da $x = -2$, y $(x - 2)^2 = 0$ da $x = 2$. En el tramo izquierdo la curva es una recta; en el derecho, una parábola con vértice en $(2, 0)$. Las dos ramas se unen en $(0, 4)$. El área con el eje x consta de las dos regiones acotadas:

$$S = \int_{-2}^0 (2x + 4)dx + \int_0^2 (x - 2)^2 dx = 4 + \frac{8}{3} = \boxed{\frac{20}{3}}.$$



Opción A - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} b+1 & 1 & 1 \\ 1 & b+1 & 1 \\ 1 & 1 & b+1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} b+1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & b+1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & b+1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Al restar filas o usar que la dirección $(1, 1, 1)$ tiene autovalor $b + 3$, se obtiene $\det A = b^2(b + 3)$. Si $b \notin \{0, -3\}$, A es invertible y el sistema es SCD. Para $b = 0$, las tres filas de A coinciden, así que $\text{rg } A = 1$. Los términos independientes no coinciden, por lo que $\text{rg } A^* = 2$; es SI. Para $b = -3$, las filas suman el vector nulo y los términos independientes también suman cero. El menor de las dos primeras filas y columnas 1,2 vale $\det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$, de modo que $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2 < 3$. Es SCI. Restando las dos primeras ecuaciones se obtiene $x = y$; tomando $x = y = t$, la tercera da $z = t + 2$. Así,

$$\boxed{(x, y, z) = (t, t, t + 2), \quad t \in \mathbb{R}}.$$

Opción A - Ejercicio 4

Los vectores directores se obtienen como productos vectoriales de los normales de los planos que definen cada recta:

$$\begin{aligned} d_r &= (1, 1, -1) \times (1, 2, 0) = (2, -1, 1), \\ d_s &= (a, 6, 0) \times (1, 0, -2) = (-12, 2a, -6). \end{aligned}$$

Para que las rectas sean paralelas, d_s debe ser proporcional a d_r . Comparando la primera y tercera componentes, la razón es -6 ; por tanto $2a = 6$ y $a = 3$. Un punto de r es $R = (0, 1, -2)$ y uno de s cuando $a = 3$ es $S = (0, -1, 1)$. El vector $S - R = (0, -2, 3)$ no es paralelo a las rectas, así que junto con d_r determina el plano. Un normal es

$$d_r \times (S - R) = (-1, -6, -4),$$

y, pasando por R , obtenemos

$$x + 6y + 4z + 2 = 0.$$

Opción B - Ejercicio 1

El dominio de las tres funciones es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Para $f(x) = x - 1/x$, $x = 0$ es asíntota vertical y $f(x) - x = -1/x \rightarrow 0$ en ambos infinitos; su asíntota oblicua es $y = x$.
- Para $g(x) = e^{1/x}$, al tender x a 0^+ la función tiende a $+\infty$, por lo que $x = 0$ es vertical. En $\pm\infty$, $g(x) \rightarrow 1$, así que $y = 1$ es horizontal.
- Para $h(x) = \ln|x|$, $h(x) \rightarrow -\infty$ por ambos lados de cero, de modo que $x = 0$ es vertical. En los infinitos crece sin cota y más despacio que una recta; no tiene asíntota horizontal ni oblicua.

Estas características identifican f : gráfica 4, g : gráfica 1, h : gráfica 3. **Opción B - Ejercicio 2**

Una primitiva de $\ln(2+x)$ se obtiene por partes, tomando $u = \ln(2+x)$ y $dv = dx$:

$$\int \ln(2+x)dx = (x+2)\ln(x+2) - (x+2) + C.$$

Por tanto,

$$\int_{-1}^0 \ln(2+x)dx = [(x+2)\ln(x+2) - (x+2)]_{-1}^0 = \boxed{2\ln 2 - 1}.$$

Opción B - Ejercicio 3

(a) La igualdad $A^2 - 2A + I = O$ exige que todas las entradas de esta matriz sean cero. Al calcularla,

$$A^2 - 2A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2-b \\ 0 & 0 & 2-b \\ b-2 & 0 & b^2-2b \end{pmatrix},$$

por lo que necesariamente y suficientemente $\boxed{b=2}$.

(b) Para $b=2$, $\det A = 1$ y

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De $AX = 2A^t$ despejamos $X = A^{-1}(2A^t)$. El segundo factor es

$$2A^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

y la multiplicación da

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 8 \\ -2 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Opción B - Ejercicio 4

La recta s se escribe en forma paramétrica como $(x, y, z) = (0, 1, 0) + t(2, 1, 3)$. La dirección de r , intersección de planos con normales $(1, 0, 1)$ y $(1, -1, 0)$, es $(1, 1, -1)$. Para que el plano que contiene a s sea paralelo a r , debe contener también esta dirección. Un normal del plano es

$$(1, 1, -1) \times (2, 1, 3) = (5, 1, -1).$$

Al pasar por $(0, 1, 0)$ resulta $\boxed{5x + y - 1 = 0}$. La recta r es paralela a este plano, y podemos usar el punto $R = (0, -1, 2) \in r$. La distancia es la de R al plano:

$$d(r, \pi) = \frac{|5(0) + (-1) - 1|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \boxed{\frac{2}{3\sqrt{3}}}.$$