

Junio de 2013 · Convocatoria ordinaria

El examen ofrece dos opciones: A y B. En cada una se resuelven los tres problemas. En cada apartado explicamos qué fórmula usamos, sustituimos los datos y señalamos qué significa el resultado.

Opción A

Problema A.1 · Compatibilidad y soluciones de un sistema

El sistema es

$$S: \begin{cases} 2x + 5y = a, \\ -x - 4y = b, \\ 2x + y = c. \end{cases}$$

Hay dos incógnitas y tres ecuaciones. Para decidir si existe solución usamos el teorema de Rouché–Frobenius: el sistema es compatible exactamente cuando el rango de la matriz de coeficientes coincide con el de la matriz ampliada. Si, además, ese rango es el número de incógnitas, la solución es única.

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 5 & a \\ -1 & -4 & b \\ 2 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

a) Condición para que el sistema sea compatible

La matriz A tiene dos columnas, así que $\text{rg}(A) \leq 2$. Comprobamos que el rango es 2 calculando un menor de orden 2:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = 2(-4) - 5(-1) = -8 + 5 = -3 \neq 0.$$

Por tanto, $\text{rg}(A) = 2$.

Ahora calculamos el determinante de la matriz ampliada, que es cuadrada:

$$\begin{aligned} \det(A^*) &= 2 \begin{vmatrix} -4 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} -1 & b \\ 2 & c \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(-4c - b) - 5(-c - 2b) + a(-1 + 8) \\ &= 7a + 8b - 3c. \end{aligned}$$

Si $7a + 8b - 3c \neq 0$, entonces $\det(A^*) \neq 0$ y $\text{rg}(A^*) = 3$. Como $\text{rg}(A) = 2$, los rangos serían distintos y el sistema no tendría solución.

Si $7a + 8b - 3c = 0$, entonces $\det(A^*) = 0$, así que $\text{rg}(A^*) < 3$. Pero el menor de orden 2 formado por las dos primeras filas y las dos primeras columnas vale $-3 \neq 0$; por eso $\text{rg}(A^*) \geq 2$. Concluimos que $\text{rg}(A^*) = 2$.

En este segundo caso,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 = \text{número de incógnitas}.$$

Por Rouché–Frobenius el sistema es compatible determinado (SCD): tiene una única solución. Así, la condición pedida es

$$\boxed{7a + 8b - 3c = 0}.$$

b) Solución para $a = -1$, $b = 2$, $c = 3$

Primero comprobamos la compatibilidad:

$$7(-1) + 8(2) - 3(3) = -7 + 16 - 9 = 0.$$

El sistema es compatible y su solución es única. Para resolverlo usamos las dos primeras ecuaciones, cuyo determinante ya vimos que es $-3 \neq 0$. Por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{4 - 10}{-3} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{4 - 1}{-3} = -1.$$

Comprobamos también la tercera ecuación: $2x + y = 2(2) - 1 = 3 = c$. Por tanto,

$$\boxed{(x, y) = (2, -1)}.$$

c) Solución cuando $a = c = -2b$

La condición de compatibilidad queda

$$7a + 8b - 3c = 7(-2b) + 8b - 3(-2b) = -14b + 8b + 6b = 0.$$

Se cumple para cualquier valor real de b ; por tanto, siempre hay una única solución. Sustituimos $a = -2b$ en las fórmulas de Cramer:

$$x = \frac{4(-2b) + 5b}{3} = -b, \quad y = -\frac{-2b + 2b}{3} = 0.$$

La tercera ecuación se verifica porque $2x + y = 2(-b) + 0 = -2b = c$. En conclusión,

$$\boxed{(x, y) = (-b, 0)}.$$

Problema A.2 · Área, volumen y distancias en el espacio

Los puntos son

$$O = (0, 0, 0), \quad A = (1, 0, 1), \quad B = (2, 1, 0), \quad C = (0, 2, 3).$$

a) Área del triángulo OAB y volumen del tetraedro $OABC$

Los vectores que forman dos lados del triángulo son

$$\overrightarrow{OA} = A - O = (1, 0, 1), \quad \overrightarrow{OB} = B - O = (2, 1, 0).$$

El área de un triángulo definido por dos vectores es la mitad del módulo de su producto vectorial:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 2, 1), \\ \|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\| &= \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{Área}(OAB) = \frac{1}{2}\sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}}.$$

El volumen de un tetraedro es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de sus tres vectores de arista. Como $\overrightarrow{OC} = (0, 2, 3)$,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} \left| (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC} \right| \\ &= \frac{1}{6} |(-1, 2, 1) \cdot (0, 2, 3)| = \frac{1}{6} |0 + 4 + 3|. \end{aligned}$$

Así, $V = \frac{7}{6}$. El valor absoluto asegura que el volumen sea positivo, independientemente del orden de los vectores.

b) Distancia de C al plano que contiene OAB

Un vector normal al plano es el producto vectorial calculado antes, $\mathbf{n} = (-1, 2, 1)$. Como el plano pasa por el origen, su ecuación general es

$$-x + 2y + z = 0.$$

La distancia de un punto (x_0, y_0, z_0) al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ es

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Sustituimos $C = (0, 2, 3)$ y el plano $-x + 2y + z = 0$:

$$d(C, \pi) = \frac{|-0 + 2(2) + 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{6}}.$$

c) Distancia de C' al mismo plano, si C' es el punto medio de OC

El punto medio de dos puntos se obtiene promediando sus coordenadas:

$$C' = \frac{O + C}{2} = \left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{0+3}{2} \right) = \left(0, 1, \frac{3}{2} \right).$$

Aplicamos de nuevo la fórmula de distancia al plano $-x + 2y + z = 0$:

$$d(C', \pi) = \frac{|-0 + 2(1) + \frac{3}{2}|}{\sqrt{6}} = \frac{\frac{7}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{7}{2\sqrt{6}}.$$

Problema A.3 · Distancia mínima del meteorito al Sol

La trayectoria cumple $y^2 = 2x + 9$, con $-4.5 \leq x \leq 8$ y $y \geq 0$. El Sol está en el origen $(0, 0)$.

a) Expresión de la distancia en función de x

De $y^2 = 2x + 9$ y de la condición $y \geq 0$, tomamos la raíz positiva:

$$y = \sqrt{2x + 9}.$$

La raíz exige $2x + 9 \geq 0$, es decir, $x \geq -\frac{9}{2}$. Junto con el intervalo del enunciado, los valores físicamente permitidos son

$$-\frac{9}{2} \leq x \leq 8.$$

La distancia de $P = (x, y)$ al origen se calcula con la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$\begin{aligned} d(x) &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2x + 9} = \sqrt{(x+1)^2 + 8}. \end{aligned}$$

Como $(x+1)^2 + 8 \geq 8 > 0$, esta expresión está definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Para el problema físico, no obstante, solo estudiamos $x \in [-\frac{9}{2}, 8]$.

b) Punto de la trayectoria más cercano al Sol

Para hallar el mínimo derivamos la función distancia. Su derivada es

$$d'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+9}} = \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+8}}.$$

El denominador es siempre positivo, pues es al menos $\sqrt{8}$. Por ello, el signo de $d'(x)$ depende solo del numerador $x + 1$. Igualamos la derivada a cero:

$$x + 1 = 0 \implies x = -1.$$

El punto crítico pertenece al intervalo permitido. Comprobamos el signo a ambos lados usando, por ejemplo, $x = -2$ y $x = 0$:

$$d'(-2) = \frac{-1}{3} < 0, \quad d'(0) = \frac{1}{3} > 0.$$

Intervalo	Valor de prueba	Signo de d'	Comportamiento
$-\frac{9}{2} < x < -1$	$x = -2$	-	La distancia decrece
$-1 < x < 8$	$x = 0$	+	La distancia crece

Al pasar de signo negativo a positivo, en $x = -1$ hay un mínimo. La coordenada vertical del meteorito en ese instante es

$$y = \sqrt{2(-1)^2 + 9} = \sqrt{7}.$$

Por tanto, el punto más cercano es $P = (-1, \sqrt{7})$.

c) Distancia mínima

Sustituimos $x = -1$ en la expresión de la distancia:

$$d(-1) = \sqrt{(-1+1)^2 + 8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

La distancia en los extremos del tramo es $d(-\frac{9}{2}) = \frac{9}{2}$ y $d(8) = \sqrt{89}$. Así, el mínimo anterior es también el mínimo absoluto del recorrido. El máximo del tramo se alcanza en $x = 8$, donde la distancia vale $\sqrt{89}$. No se añaden unidades porque el enunciado no proporciona ninguna.

Comprobación de asíntotas

La expresión matemática $d(x) = \sqrt{(x+1)^2 + 8}$ es continua para todo real, así que no tiene asíntotas verticales. Si se estudia su extensión fuera del tramo físico, al racionalizar se obtiene

$$d(x) - (x+1) = \frac{8}{\sqrt{(x+1)^2 + 8} + x + 1} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty),$$

y, en el otro extremo,

$$d(x) - (-x-1) = \frac{8}{\sqrt{(x+1)^2 + 8} - (x+1)} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty).$$

La extensión tiene asíntotas oblicuas $y = x + 1$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y $y = -x - 1$ cuando $x \rightarrow -\infty$. En el movimiento descrito, x está limitado a $[-\frac{9}{2}, 8]$, por lo que esas asíntotas no forman parte del tramo recorrido.

Opción B

Problema B.1 · Determinantes de matrices

Las matrices del enunciado son

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Usaremos estas propiedades: $\det(XY) = \det(X)\det(Y)$, $\det(X^{-1}) = 1/\det(X)$, $\det(X^k) = \det(X)^k$, y para una matriz 3×3 , $\det(\lambda X) = \lambda^3 \det(X)$.

Como A y B son triangulares, $\det(A)$ y $\det(B)$ son el producto de sus diagonales:

$$\det(A) = (-2)(1)(-2) = 4, \det(B) = (2)(-5)(2) = -20.$$

La suma es

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

y su determinante, desarrollado por la primera fila, vale

$$\det(A + B) = 0 - 1(1 \cdot 0 - 0 \cdot 4) + 2(1 \cdot 2 - (-4) \cdot 4) = 0 + 36 = 36.$$

a) Determinantes de $A + B$ y $\frac{1}{2}(A + B)^{-1}$

El primero ya se ha calculado:

$$\boxed{\det(A + B) = 36}.$$

Para el segundo, como las matrices son de orden 3, sacar el factor $\frac{1}{2}$ multiplica el determinante por $(\frac{1}{2})^3$. Además, el determinante de la inversa es el inverso del determinante:

$$\begin{aligned} \det\left(\frac{1}{2}(A + B)^{-1}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \det((A + B)^{-1}) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\det(A + B)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{36} = \boxed{\frac{1}{288}}. \end{aligned}$$

b) Determinantes de $(A + B)^{-1}A$ y $A^{-1}(A + B)$

Aplicamos el determinante de un producto a cada expresión, respetando el orden indicado:

$$\begin{aligned} \det((A + B)^{-1}A) &= \det((A + B)^{-1}) \det(A) \\ &= \frac{1}{36} \cdot 4 = \boxed{\frac{1}{9}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A^{-1}(A + B)) &= \det(A^{-1}) \det(A + B) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 36 = \boxed{9}. \end{aligned}$$

c) Determinantes de $2AA^{-1}$ y $A^{-1}B$

Como $AA^{-1} = I_3$, la primera matriz es $2I_3$. Para una matriz de orden 3, el factor 2 multiplica el determinante por 2^3 :

$$\det(2AA^{-1}) = \det(2I_3) = 2^3 \det(I_3) = \boxed{8}.$$

Para el segundo, aplicamos el determinante del producto y la propiedad del inverso:

$$\det(A^{-1}B) = \det(A^{-1}) \det(B) = \frac{1}{4}(-20) = \boxed{-5}.$$

Problema B.2 · Distancias en el espacio

Los puntos son

$$A = (1, 0, 1), B = (2, -1, 0), C = (0, 1, 1), P = (0, -3, 2).$$

a) Distancia de P a A

La distancia entre dos puntos es la norma del vector que los une:

$$\overrightarrow{PA} = A - P = (1, 3, -1), d(P, A) = \|\overrightarrow{PA}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} = \boxed{\sqrt{11}}.$$

b) Distancia de P a la recta AB

Primero escribimos la recta en forma paramétrica, como se pide para las rectas del espacio. Su vector director es

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1, -1),$$

por lo que

$$AB: \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -t, \\ z = 1 - t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

La distancia de un punto a una recta se puede calcular con

$$d(P, AB) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}.$$

Con $\overrightarrow{AP} = P - A = (-1, -3, 1)$, calculamos

$$\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB} = (-1, -3, 1) \times (1, -1, -1) = (4, 0, 4).$$

Entonces

$$\|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}, \quad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}.$$

Sustituimos en la fórmula:

$$d(P, AB) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{4\sqrt{6}}{3}}.$$

c) Distancia de P al plano ABC

Dos vectores del plano son

$$\overrightarrow{AB} = (1, -1, -1), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (-1, 1, 0).$$

Un vector normal se obtiene con el producto vectorial:

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, 1, 0).$$

La ecuación general del plano es, por tanto, $x + y + D = 0$. Como $A = (1, 0, 1)$ pertenece al plano, $1 + 0 + D = 0$, de donde $D = -1$. Así,

$$\pi_{ABC} : x + y - 1 = 0.$$

Usamos la fórmula de distancia punto-plano:

$$d(P, \pi_{ABC}) = \frac{|0 + (-3) - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \boxed{2\sqrt{2}}.$$

Problema B.3 · Rectas tangente y normal a $f(x) = \sin x$

La función seno está definida para todo número real, así que su dominio es $\mathbb{R}$. Su derivada es $f'(x) = \cos x$; el valor de esta derivada en un punto da la pendiente de la tangente a la curva.

a) Tangente en $x = \frac{\pi}{6}$

Punto de tangencia: $P = (\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$; pendiente: $m_t = f'(\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; vector director:

$$\mathbf{v}_t = (1, \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

$$r_t : \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + t, \\ y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}t, \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

b) Normal en $x = \frac{\pi}{3}$

El punto de la curva es

$$\left(\frac{\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

La pendiente de la tangente en ese punto es

$$m_t = f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

La normal es perpendicular a la tangente, de modo que sus pendientes cumplen $m_t m_n = -1$. Así, $m_n = -2$, y podemos tomar $(1, -2)$ como vector director. La normal en forma paramétrica es

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2t, \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

c) Ángulo entre ambas rectas

Tomamos vectores directores de las rectas:

$$\mathbf{u} = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \mathbf{v} = (1, -2).$$

El ángulo menor θ entre dos rectas se obtiene con el valor absoluto del producto escalar:

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$

Calculamos cada término:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 - \sqrt{3}, \|\mathbf{u}\| = \frac{\sqrt{7}}{2}, \|\mathbf{v}\| = \sqrt{5}.$$

Por tanto,

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3} - 1}{(\sqrt{7}/2)\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{35}}.$$

La respuesta exacta es

$$\theta = \arccos\left(\frac{2(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{35}}\right).$$

En grados, $\theta \approx 75.67^\circ$. El valor absoluto selecciona el ángulo menor formado por las dos rectas.