

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Elena, Pedro y Juan colocan diariamente hojas de propaganda sobre los parabrisas de los coches aparcados en la calle. Pedro reparte siempre el 20% del total de la propaganda, Juan reparte 100 hojas más que Elena y entre Pedro y Elena colocan 850 hojas en los parabrisas. Plantear un sistema de ecuaciones que permita averiguar cuántas hojas reparten, respectivamente, Elena, Pedro y Juan y calcular estos valores.

Solución:

Utilizamos las siguientes incógnitas,

x = Número de hojas repartidas por Elena

y = “ “ “ “ “ Pedro

z = “ “ “ “ “ Juan

Pasemos las frases del problema a ecuaciones,

“Pedro reparte siempre el 20% del total de la propaganda” $y = \frac{20}{100}(x + y + z)$

“Juan reparte 100 hojas más que Elena” $z = 100 + x$

“entre Pedro y Elena colocan 850 hojas en los parabrisas” $x + y = 850$

El sistema a plantear es:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{10}(x + y + z) \\ z = 100 + x \\ x + y = 850 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10y = 2x + 2y + 2z \\ x - z = -100 \\ x + y = 850 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 8y + 2z = 0 \\ x - z = -100 \\ x + y = 850 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 4y + z = 0 \\ x - z = -100 \\ x + y = 850 \end{cases}$$

Resolvamos el sistema; calculamos el determinante de la matriz de coeficientes,

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 1 = 6$$

como es distinto de cero podemos resolver el sistema por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 \\ -100 & 0 & -1 \\ 850 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-100 + 3400}{6} = \frac{3300}{6} = 550$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -100 & -1 \\ 1 & 850 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{850 + 100 + 850}{6} = \frac{1800}{6} = 300$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -100 \\ 1 & 1 & 850 \end{vmatrix}}{6} = \frac{400 + 100 + 3400}{6} = \frac{3900}{6} = 650$$

Elena reparte 550 hojas, Pedro 300 y Juan 650.

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Las necesidades vitamínicas de una persona son de un mínimo de 36 mgr. de vitamina A, 28 mgr. de vitamina C y 34 mgr. de vitamina D. Estas necesidades se cubren tomando pastillas de la marca *Energic* y de la marca *Vigor*. Cada pastilla de la marca *Energic* cuesta 0,03 € y proporciona 2 mgr. de vitamina A, 2 mgr. de vitamina C y 8 mgr. de vitamina D. Cada pastilla de la marca *Vigor* cuesta 0,04 € y proporciona 3 mgr. de vitamina A, 2 mgr. de vitamina C y 2 mgr. de vitamina D. ¿Cuántas pastillas de cada marca se han de tomar diariamente si se desean cubrir las necesidades vitamínicas básicas con el menor coste posible? Determinar dicho coste.

Solución:

Expresamos los datos del problema en una tabla,

	Vitamina A	Vitamina C	Vitamina D	precio
<i>Energic</i>	2	2	8	0,03
<i>Vigor</i>	3	2	2	0,04
necesidades mínimas	36	28	34	

Las incógnitas a utilizar son: $x = \text{n}^\circ \text{ de pastillas de la marca Energic}$
 $y = \text{n}^\circ \text{ de pastillas de la marca Vigor}$

El coste es: $0,03x + 0,04y$

Las restricciones del problema son:

mínima cantidad de vit. A	$2x + 3y \geq 36$
mínima cantidad de vit. C	$2x + 2y \geq 28$
mínima cantidad de vit. D	$8x + 2y \geq 34$

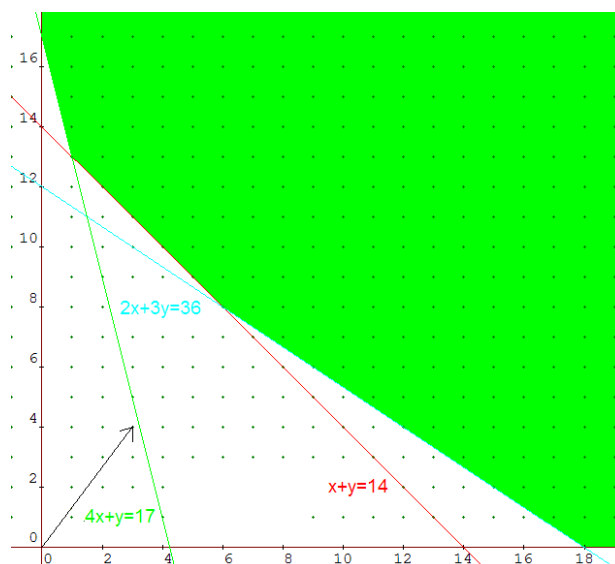
El problema de programación lineal a resolver es:

minimizar $z = 0,03x + 0,04y$ s.a. $2x + 3y \geq 36$ $2x + 2y \geq 28$ $8x + 2y \geq 34$ $x, y \in \mathbb{N}$	Simplificamos las restricciones segunda y tercera por 2:	minimizar $z = 0,03x + 0,04y$ s.a. $2x + 3y \geq 36$ $x + y \geq 14$ $4x + y \geq 17$ $x, y \in \mathbb{N}$
--	---	---

Cálculos para representar gráficamente las restricciones,

$2x + 3y \geq 36$			$x + y \geq 14$			$4x + y \geq 17$		
$2x + 3y = 36$			$x + y = 14$			$4x + y = 17$		
x	y		x	y		x	y	
0	12		0	14		0	17	
18	0		14	0		4	1	
(0,0) ¿cumple la restricción? No $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \geq 36$ No			(0,0) ¿cumple la restricción? No $0 + 0 \geq 14$ No			(0,0) ¿cumple la restricción? No $4 \cdot 0 + 0 \geq 17$ No		

La representación gráfica es,



Calculemos los puntos de corte que hace falta conocer,

$\begin{cases} 2x+3y=36 \\ x+y=14 \end{cases}$	- 2 x (2ª ecu)	$\begin{cases} 2x+3y=36 \\ -2x-2y=-28 \end{cases}$	Sumando ambas ecuaciones, $y=8$ Sustituyendo en la 2ª $x+8=14$; $x=6$	El punto de corte es (6, 8)
$\begin{cases} 2x+3y=36 \\ 4x+y=17 \end{cases}$	- 2 x (1ª ecu)	$\begin{cases} -4x-6y=-72 \\ 4x+y=17 \end{cases}$	Sumando ambas ecuaciones, $-5y=-55$; $y=11$ Sustituyendo en la 2ª $4x+11=17$; $4x=6$; $x=1.5$	El punto de corte es (1.5, 11)
$\begin{cases} x+y=14 \\ 4x+y=17 \end{cases}$	2ª - 1ª	$3x=3$; $x=1$	Sustituyendo en la 1ª $1+y=14$; $y=13$	El punto de corte es (1, 13)

La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona coloreada.

Estudiamos la función z en los extremos de la región factible,

(x,y)	$z=0.03x+0.04y$		
(0,17)	$0.04 \cdot 17 = 0.68$		Para que el coste sea mínimo, diariamente se deben tomar 6 pastillas de la marca Energic y 8 de la marca Vigor.
(1,13)	$0.03 \cdot 1 + 0.04 \cdot 13 = 0.55$		
(6,8)	$0.03 \cdot 6 + 0.04 \cdot 8 = 0.50$	mínimo	
(18,0)	$0.03 \cdot 18 = 0.54$		Con este consumo el coste mínimo diario será de 0.50 €

Tu Profeta al Rescate

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Se estima que los beneficios mensuales de una fábrica de golosinas, en miles de euros, vienen dados por la función $f(x) = -0,1x^2 + 2,5x - 10$, cuando se venden x toneladas de producto. Se pide:

- Calcular la cantidad de toneladas que se ha de vender para obtener el beneficio máximo y calcular éste. Justificar que es máximo.
- La cantidad mínima que se ha de vender para no tener pérdidas.
- ¿Qué cantidad produce el máximo beneficio por tonelada vendida? Calcular el máximo beneficio y justificar que es máximo.

Solución:

a) Calculemos el dominio de la función $f(x)$. Esta función da los beneficios dependiendo de las toneladas de producto vendidas, luego el dominio de $f(x)$ serán los valores de x tales que $f(x) \geq 0$.

Resolvamos la inecuación $-0,1x^2 + 2,5x - 10 \geq 0$, para ello resolvemos la ecuación,

$$x = \frac{-2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 4(-0,1)(-10)}}{2(-0,1)} = \frac{-2,5 \pm \sqrt{6,25 - 4}}{-0,2} = \frac{-2,5 \pm \sqrt{2,25}}{-0,2} =$$

$$-0,1x^2 + 2,5x - 10 = 0 \quad = \frac{-2,5 \pm 1,5}{-0,2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-2,5 + 1,5}{-0,2} = \frac{-1}{-0,2} = 5 \\ x_2 = \frac{-2,5 - 1,5}{-0,2} = \frac{-4}{-0,2} = 20 \end{cases}$$

Como $f(x)$ es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 negativo la solución de $f(x) \geq 0$ es el intervalo $[5, 20]$. Por tanto $\text{Dom } f(x) = [5, 20]$

El máximo relativo de $f(x)$ se alcanza en su vértice $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2,5}{2(-0,1)} = 12,5$

Como $12,5 \in [5, 20]$ el máximo relativo es máximo absoluto de $f(x)$.

Para $x = 12,5$, $f(x) = -0,1 \cdot 12,5^2 + 2,5 \cdot 12,5 - 10 = 5,625$

Para obtener un beneficio máximo hay que vender 12,5 toneladas del producto y el beneficio será de 5625 €

b) La cantidad mínima que se ha de vender para no tener pérdidas es 5 toneladas, según obtuvimos en el apartado anterior al calcular el dominio de $f(x)$.

c) El beneficio por tonelada vendida viene dado por la función

$$y = \frac{-0,1x^2 + 2,5x - 10}{x} \quad x \in [5, 20]$$

Calculemos el máximo de esta función,

$$y' = \frac{(-0,2x + 2,5)x - (-0,1x^2 + 2,5x - 10)}{x^2} = \frac{-0,2x^2 + 2,5x + 0,1x^2 - 2,5x + 10}{x^2} = \frac{-0,1x^2 + 10}{x^2}$$

Estudiamos la monotonía de y ,

$$-0,1x^2 + 10 = 0 \rightarrow 0,1x^2 = 10 \rightarrow x^2 = 100 \rightarrow x = \pm 10$$

$$x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

calculemos el signo de y' en los siguientes intervalos,

intervalo	x	y'
$(-\infty, -10)$	-20	$\frac{-0,1(-20)^2 + 10}{(-20)^2} = \frac{-40 + 10}{200} = \text{negativo}$
$(-10, 0)$	-5	$\frac{-0,1(-5)^2 + 10}{(-5)^2} = \frac{-2,5 + 10}{25} = \text{positivo}$
$(0, 10)$	5	$\frac{-0,1(5)^2 + 10}{(5)^2} = \frac{-2,5 + 10}{25} = \text{positivo}$
$(10, +\infty)$	20	$\frac{-0,1(20)^2 + 10}{(20)^2} = \frac{-40 + 10}{200} = \text{negativo}$

Como el dominio de la función y es el intervalo $[5, 20]$, el estudio anterior nos dice que la función y es creciente en $(5, 10)$ y decreciente en $(10, 20)$, luego en $x = 10$ hay un máximo relativo.

$$\text{Para } x = 10 \quad y = \frac{-01 \cdot 10^2 + 25 \cdot 10 - 10}{10} = \frac{-10 + 25 - 10}{10} = \frac{5}{10} = 0'5$$

Este máximo relativo es máximo absoluto por que $y(5)=0$ e $y(20)=0$ (para estos valores de x el numerador de y es 0, obtenido en el primer apartado) e $y(10)=0'5$.

La cantidad que produce el máximo beneficio por tonelada vendida es 10 toneladas, el beneficio será $(10 \cdot 0'5 = 5$ miles de €) 5000 €.

Tu Profe al Rescate

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. Sean A y B dos sucesos con $P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,3$ y $P(A \cap B) = 0,1$. Calcular las probabilidades siguientes: $P(A \cup B)$, $P(A/B)$, $P(A/A \cap B)$ y $P(A/A \cup B)$

Solución:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,3 - 0,1 = 0,7$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$$

$$P(A/A \cap B) = \frac{P(A \cap (A \cap B))}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = 1$$

$$(A \cap B) \subset A \rightarrow A \cap (A \cap B) = A \cap B$$

$$P(A/A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0,5}{0,7} = \frac{5}{7}$$

$$A \subset (A \cup B) \rightarrow A \cap (A \cup B) = A$$

Tu Profe al Rescate

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Sea $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

la matriz de sus términos independientes. Se pide:

- Escribir las tres ecuaciones que forman el sistema.
- Obtener todas las soluciones del sistema.

Solución:

La expresión matricial del sistema es: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Las tres ecuaciones que forman el sistema son

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + 5y + z = 1 \end{cases}$$

b) Para encontrar las soluciones del sistema, estudiamos los rangos de la matriz de coeficientes (A) y de la ampliada (A'),

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (\text{como } C_1 = 2C_3) = 0 \rightarrow \text{ran}(A) \leq 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Orlamos el menor de orden 2 usando la columna de términos independientes de A',

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (\text{como } C_1 = 2C_3) = 0 \rightarrow \text{ran}(A') \leq 2 \quad \text{pero como } \text{ran}(A) = 2, \text{ entonces } \text{ran}(A') = 2$$

Por lo tanto hemos obtenido que $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^\circ \text{ incógnitas } (3)$, es un sistema compatible indeterminado. Para obtener las soluciones usaremos las ecuaciones e incógnitas correspondientes al menor de orden 2 no nulo, es decir

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1 - z \\ 2x + 3y = 1 - z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & 2 \\ 1-z & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{3-3z-2+2z}{2} = \frac{1-z}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1-z \\ 2 & 1-z \end{vmatrix}}{2} = \frac{2(1-z) - 2(1-z)}{2} = 0$$

La solución del sistema es:
$$\begin{cases} x = \frac{1-\lambda}{2} \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Un vendedor dispone de 350000 € para invertir en dos tipos de microondas. El que dispone de más accesorios tiene un coste de 150 € y reporta un beneficio de 15 € por unidad vendida, mientras que el otro modelo sólo proporciona un beneficio de 11 € por unidad vendida y tiene un coste de 100 €. Sabiendo que sólo se pueden almacenar 3000 microondas y que no se venderán más de 2000 del modelo más caro, determinar cuántos microondas de cada clase se deben comprar para maximizar el beneficio y calcular éste.

Solución:

Expresamos los datos del problema en una tabla,

	coste	beneficio
modelo superior	150	15
modelo inferior	100	11

Las incógnitas a utilizar son: $x = \text{n}^\circ \text{ de microondas de clase superior a comprar}$
 $y = \text{n}^\circ \text{ de microondas de clase inferior a comprar}$

El beneficio es: $15x + 11y$

Las restricciones del problema son: “dispone de 350000 €” $150x + 100y \leq 350000$
“sólo puede almacenar 3000 microondas” $x + y \leq 3000$
“no se venderán más de 2000 del caro” $x \leq 2000$

El problema de programación lineal a resolver es:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } z = 15x + 11y \\ &\text{s.a. } 150x + 100y \leq 350000 \\ &\quad x + y \leq 3000 \\ &\quad x \leq 2000 \\ &\quad x, y \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Cálculos para representar gráficamente las restricciones,

$150x + 100y \leq 350000$			$x + y \leq 3000$			$x \leq 2000$		
$150x + 100y = 350000$			$x + y = 3000$			$x = 2000$		
x	y		x	y				
0	3500		0	3000				
2333.33	0		3000	0				
(0,0) ¿cumple la restricción? Sí $150 \cdot 0 + 100 \cdot 0 \leq 350000$ Sí			(0,0) ¿cumple la restricción? Sí $0 + 0 \leq 3000$ Sí			(0,0) ¿cumple la restricción? Sí $0 \leq 2000$ Sí		

La representación gráfica es,



Calculemos los puntos de corte que hace falta conocer,

$\begin{cases} x + y = 3000 \\ 150x + 100y = 350000 \end{cases}$	$-100x(1^{\text{a ecu}})$	$\begin{cases} -100x - 100y = 300000 \\ 150x + 100y = 350000 \end{cases}$	Sumando las ecuaciones, $50x = 50000; x = 1000$ Sustituyendo en la 1ª $1000 + y = 3000;$ $y = 2000$	El punto de corte es (1000 , 2000)
$\begin{cases} x + y = 3000 \\ x = 2000 \end{cases}$	Sustituyendo en la 1ª, $2000 + y = 3000; y = 1000$			El punto de corte es (2000 , 1000)
$\begin{cases} x = 2000 \\ 150x + 100y = 350000 \end{cases}$	Sustituyendo en la 2ª, $150 \cdot 2000 + 100y = 350000; 300000 + 100y = 350000;$ $100y = 50000; y = 500$			El punto de corte es (2000 , 500)

La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona coloreada.

Estudiamos la función z en los extremos de la región factible,

(x,y)	$z = 15x + 11y$		Debe comprar 1000 microondas del tipo con más accesorios y 2000 del otro. El beneficio que obtendrá será de 37000 €
(0,0)	$15 \cdot 0 + 11 \cdot 0 = 0$		
(0,3000)	$15 \cdot 0 + 11 \cdot 3000 = 33000$		
(1000,2000)	$15 \cdot 1000 + 11 \cdot 2000 = 37000$	máximo	
(2000,500)	$15 \cdot 2000 + 11 \cdot 500 = 35500$		
(2000,0)	$15 \cdot 2000 + 11 \cdot 0 = 30000$		

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Una empresa de telefonía quiere lanzar al mercado una oferta de tarifa plana de internet. Se ha realizado un estudio que determina que si la tarifa fuera de 36 € podrían conseguirse 4800 contratos. Sin embargo, por cada euro menos en la tarifa, el número de contratos previsto anteriormente se incrementaría en 150. Se pide:

- Expresar el ingreso total previsto como una función de una variable. Explica el significado de la variable utilizada.
- ¿Cuál debería ser la tarifa para que la empresa obtuviera el ingreso máximo? ¿Cuál es éste y con cuántos abonados se conseguiría? Justificar que el ingreso obtenido realmente es máximo.

Solución

De los datos del problema obtenemos la siguiente tabla de valores,

tarifa (€)	nº de contratos	ingreso total
36	4800	36 · 4800
35	4800 + 150	35 · 4950
34	4800 + 150 · 2	34 · 5100
...	...	...
36 - x	4800 + 150 x	...

siendo x el número de euros que rebajamos la tarifa inicial, luego x puede tomar valores de 0 a 36.

- a) El ingreso total previsto en función de los euros que rebajemos la tarifa inicial (36 €) será:

$$I(x) = (36 - x)(4800 + 150x) \quad x = 0, 1, \dots, 36$$

$$\text{Efectuando operaciones, } I(x) = 172800 + 5400x - 4800x - 150x^2 = -150x^2 + 600x + 172800$$

- b) Para encontrar el ingreso máximo representamos la parábola $y = -150x^2 + 600x + 172800$

$$x = 0; y = 172800$$

$$y = 0; (36 - x)(4800 + 150x) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} 36 - x = 0; x = 36 \\ 4800 + 150x = 0; x = -4800/150; x = -32 \end{array} \right.$$

vértice de la parábola,

$$x = \frac{36 - 32}{2} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow y = (36 - 2)(4800 + 150 \cdot 2) = 34 \cdot 5100 = 173400$$

Como el coeficiente de x^2 en la parábola es negativo, el vértice es el máximo de la parábola.

La función $I(x)$ que nos interesa toma valores para $x = 0, 1, 2, \dots, 36$. La parábola alcanza el máximo para $x = 2$ (uno de los valores que estudiamos), la función $I(x)$ alcanza su máximo para $x = 2$.

Para que el ingreso sea máximo debemos rebajar la tarifa inicial (36 €) en dos euros, es decir:

tarifa: 34 €

nº de abonados: 5100

ingreso: 173400 €

EJERCICIO B

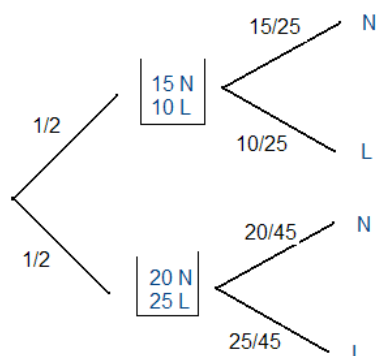
PROBLEMA 4. Tenemos dos bolsas de caramelos, la primera contiene 15 caramelos de naranja y 10 de limón y la segunda 20 de naranja y 25 de limón. Elegimos una de las bolsas al azar y extraemos un caramelo. Calcular:

- La probabilidad de que el caramelo sea de naranja.
- Si el caramelo elegido es de limón, ¿cuál es la probabilidad de que lo hayamos extraído de la segunda bolsa?

Solución:

Llamando: B_1 la primera bolsa
 B_2 la segunda bolsa
 N caramelo de naranja
 L caramelo de limón

El árbol del problema es,



$$a) \quad P(N) = P(B_1) P(N/B_1) + P(B_2) P(N/B_2) = \frac{1}{2} \frac{15}{25} + \frac{1}{2} \frac{20}{45} = \frac{3}{10} + \frac{2}{9} = \frac{27 + 20}{90} = \frac{47}{90}$$

$$b) \quad P(B_2 / L) = \frac{P(B_2 \cap L)}{P(L)} = \frac{P(B_2) P(L/B_2)}{P(B_1) P(L/B_1) + P(B_2) P(L/B_2)} = \frac{\frac{1}{2} \frac{25}{45}}{\frac{1}{2} \frac{10}{25} + \frac{1}{2} \frac{25}{45}} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{2}{5} + \frac{5}{9}} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{18 + 25}{45}} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{43}{45}} = \frac{45 \cdot 5}{43 \cdot 9} = \frac{5 \cdot 5}{43} = \frac{25}{43}$$