

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dadas las matrices reales:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

se pide :

- Calcular la matriz $M = A - 2BC$. (1 punto)
- Justificar que existe la matriz D^{-1} inversa de D y calcular tal matriz. (0,9 puntos)
- Calcular las matrices X, Y que cumplen $DX = M = YD$. (1,4 puntos)

Solución:

a) $M = A - 2BC =$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2-3-1 & -1+2-4 \\ 4+9+2 & -2-6+8 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -30 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ -21 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- b) La matriz inversa de D existirá si el determinante de D es distinto de cero;

$$|D| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 7 = -1 \neq 0 \quad \text{luego} \quad \exists D^{-1}$$

Calculemos D^{-1}

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ij}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ D^{-1} &= \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- c) $DX = M$, multiplicando por la izquierda por D^{-1}

$$D^{-1}DX = D^{-1}M; \quad IX = D^{-1}M; \quad X = D^{-1}M$$

$$X = D^{-1}M = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ -21 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18-147 & -28+28 \\ 9+63 & 14-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -165 & 0 \\ 72 & 2 \end{pmatrix}$$

 $YD = M$, multiplicando por la derecha por D^{-1}

$$YDD^{-1} = MD^{-1}; \quad YI = MD^{-1}; \quad Y = MD^{-1}$$

$$Y = MD^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ -21 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18+14 & 63-42 \\ 42+4 & -147-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 21 \\ 46 & -159 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Las tallas de los ciudadanos adultos de una gran ciudad siguen una distribución normal de media 1,70 y desviación típica 0,20.

a) Se selecciona al azar un ciudadano. Averigua razonadamente cuál es la probabilidad de que su talla sea superior a 1,95. (1,5 puntos)

b) Se selecciona al azar otro ciudadano entre los de talla superior a 1,65. Averigua razonadamente cuál es la probabilidad de que su talla sea superior a 1,95. (1,8 puntos)

Solución:

Llamando $T =$ talla de los ciudadanos adultos, sabemos que $T = N(1,70, 0,20)$

$$a) \quad P(T > 1,95) = P\left(\frac{T - 1,70}{0,20} > \frac{1,95 - 1,70}{0,20}\right) = P\left(Z > \frac{0,25}{0,20}\right) = P(Z > 1,25) = 1 - P(Z \leq 1,25) = 1 - 0,8944 = 0,1056$$

$$b) \quad P\left(\frac{T > 1,95}{T > 1,65}\right) = \frac{P(T > 1,95) \cap P(T > 1,65)}{P(T > 1,65)} = \frac{P(T > 1,95)}{P(T > 1,65)} = (*)$$

Calculemos el valor del denominador, el del numerador lo obtuvimos en el apartado anterior,

$$P(T > 1,65) = P\left(\frac{T - 1,70}{0,20} > \frac{1,65 - 1,70}{0,20}\right) = P\left(Z > \frac{-0,05}{0,20}\right) = P(Z > -0,25) = P(Z < 0,25) = 0,5987$$

Por lo que el cálculo inicial será,

$$(*) = \frac{0,1056}{0,5987} = 0,1764$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Consideramos los planos

$$\pi_1 : x + y - 6 = 0$$

$$\pi_2 : 2x + 4y + \lambda z + 2 = 0$$

donde λ es un parámetro real. Se pide:

- a) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos π_1 y π_2 cuando $\lambda = 4$. (1,5 puntos)
 b) Calcular razonadamente λ para que los planos π_1 y π_2 se corten formando un ángulo de 45° . (1,8 puntos)

Solución:

- a) Para $\lambda = 4$ el plano π_2 será: $2x + 4y + 4z + 2 = 0$; simplificando por 2 queda
 $x + 2y + 2z + 1 = 0$

La ecuación de la recta r intersección de estos dos planos será, en forma implícita,

$$r : \begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta r las obtenemos resolviendo el sistema anterior,

como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$ usamos como incógnitas principales x e y ,

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x + 2y = -1 - 2z \end{cases} \quad \begin{matrix} *(-1) \\ \end{matrix} \begin{cases} -x - y = -6 \\ x + 2y = -1 - 2z \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{sumando} \\ \end{matrix} \quad y = -7 - 2z$$

sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación, $x - 7 - 2z = 6$; despejando x , $x = 13 + 2z$ Las ecuaciones paramétricas de r serán,

$$r : \begin{cases} x = 13 + 2\mu \\ y = -7 - 2\mu \\ z = \mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

- b) π_1 y π_2 se cortarán formando un ángulo de 45° cuando sus vectores ortogonales también lo formen,

$$\vec{n}_1(1,1,0) \quad \text{y} \quad \vec{n}_2(2,4,\lambda)$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}\right) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{(1,1,0) \cdot (2,4,\lambda)}{\sqrt{1+1} \sqrt{4+16+\lambda^2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2+4}{\sqrt{2} \sqrt{20+\lambda^2}}$$

$$\sqrt{2} \sqrt{2} \sqrt{20+\lambda^2} = 12$$

$$2 \sqrt{20+\lambda^2} = 12$$

$$\sqrt{20+\lambda^2} = 6$$

Elevando ambos miembros de la igualdad al cuadrado,

$$20 + \lambda^2 = 36 \rightarrow \lambda^2 = 16 \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{16} \rightarrow \lambda = \pm 4$$

Comprobamos las soluciones obtenidas en la ecuación irracional

Para $\lambda = 4 \rightarrow \sqrt{20+4^2} = 6; \sqrt{20+16} = 6; \sqrt{36} = 6$ Sí

Para $\lambda = -4 \rightarrow \sqrt{20+(-4)^2} = 6; \sqrt{20+16} = 6; \sqrt{36} = 6$ Sí

Ambos planos se cortarán formando un ángulo de 45° cuando $\lambda = -4$ o $\lambda = 4$.

Tu Profe al Rescate

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. Sea $f(x) = x^3 + a x^2 + b x + c$. Hallar a, b, c sabiendo que f alcanza un máximo en $x = -4$ y un mínimo en $x = 0$ y que $f(1) = 1$.

Solución:

Máximo en $x = -4$, $f'(-4) = 0$

Mínimo en $x = 0$, $f'(0) = 0$

Calculemos $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

Obtenemos las ecuaciones correspondientes a las tres condiciones que conocemos de la función f ,

$f'(-4) = 0$	$\rightarrow$	$3(-4)^2 + 2a(-4) + b = 0;$	$48 - 8a + b = 0$
$f'(0) = 0$	$\rightarrow$	$3 \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 + b = 0;$	$b = 0$
$f(1) = 1$	$\rightarrow$	$1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 1;$	$1 + a + b + c = 1$

Sustituyendo el valor de b obtenido en la 2ª condición en las otras dos tenemos el sistema,

$$\begin{cases} 48 - 8a = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}$$

De la 1ª ecuación obtenemos el valor de a ; $48 = 8a$, $a = 6$

Sustituyendo en la 2ª ecuación $6 + c = 0$, $c = -6$

Los valores de los parámetros son: $a = 6$, $b = 0$ y $c = -6$; la expresión de f será $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$

Tu Prof te al Rescate

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} x + y + z = \lambda \\ 2x + 3y + 5z = 2 \\ 3x + 5y + \lambda^2 z = 1 \end{cases}$$
, dependiente del parámetro λ , se pide:

- Determinar para qué valores de λ el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible. (1,3 puntos)
- Obtener el conjunto S de las soluciones del sistema para el caso compatible indeterminado. (1 punto)
- Obtener el vector de S ortogonal (perpendicular) al vector $(1,1,2)$. (1 punto)

Solución:

i) La matriz ampliada del sistema es

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & \lambda^2 & 1 \end{array} \right)$$

El máximo rango posible de A y A' es 3, estudiamos el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & \lambda^2 \end{vmatrix} = 3\lambda^2 + 15 + 10 - 9 - 25 - 2\lambda^2 = \lambda^2 - 9$$

$$\lambda^2 - 9 = 0 \rightarrow \lambda^2 = 9 \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{9} \rightarrow \lambda = \pm 3$$

Para $\lambda \neq -3$ y $\lambda \neq 3$, $\text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A') = n^\circ$ de incógnitas, Sistema Compatible Determinado.

Para $\lambda = -3$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 9 & 1 \end{array} \right)$$

Sabemos que $\det(A) = 0$, calculemos el rango de A ,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Veamos el rango de A' , al menor anterior le orlamos la 4ª columna y la 3ª fila,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 30 + 6 + 27 - 10 - 2 = -6 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Como $\text{ran}(A) = 2 \neq 3 = \text{ran}(A')$, Sistema Incompatible

Para $\lambda = 3$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 9 & 1 \end{array} \right)$$

Al igual que calculamos en el caso anterior $\text{ran}(A) = 2$

Veamos el de A'

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 30 + 6 - 27 - 10 - 2 = 39 - 39 = 0$$

como no hay más menores de orden 3 de A' , $\text{ran}(A') = 2$

Como $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A') < n^\circ$ incógnitas, Sistema Compatible Indeterminado

En resumen,

Para $\lambda \neq -3$ y $\lambda \neq 3$, Sistema Compatible Determinado.

Para $\lambda = -3$, Sistema Incompatible

Para $\lambda = 3$, Sistema Compatible Indeterminado

- ii) El sistema es compatible indeterminado para $\lambda = 3$, el menor que da el rango 2 es el formado por 1ª y 2ª fila y 1ª y 2ª columna, luego las incógnitas principales serán x e y ; para resolver el sistema usaremos la 1ª y 2ª ecuación. Es decir:

$$\begin{cases} x + y = 3 - z \\ 2x + 3y = 2 - 5z \end{cases}$$

En el apartado anterior ya calculamos el determinante del sistema,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Resolviendo el sistema por la regla de Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 - z & 1 \\ 2 - 5z & 3 \end{vmatrix}}{1} = 9 - 3z - 2 + 5z = 7 + 2z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - z \\ 2 & 2 - 5z \end{vmatrix}}{1} = 2 - 5z - 6 + 2z = -4 - 3z$$

Para $\lambda = 3$ el conjunto, S , de soluciones del sistema es:
$$\begin{cases} x = 7 + 2\mu \\ y = -4 - 3\mu \\ z = \mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

- iii) Los vectores de S son de la forma $(7 + 2\mu, -4 - 3\mu, \mu)$.
El que sea ortogonal al vector $(1, 1, 2)$ debe cumplir:
 $(7 + 2\mu, -4 - 3\mu, \mu) \cdot (1, 1, 2) = 0$
 $7 + 2\mu - 4 - 3\mu + 2\mu = 0$
 $\mu + 3 = 0 \rightarrow \mu = -3$
El vector buscado es $(1, 5, -3)$

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Dado el plano definido por la ecuación $\pi: 8x - 4y + z = 3$, hallar

- a) La ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto $P(1, -3, 7)$, expresada como la intersección de dos planos. (1 punto)
 b) La distancia del punto P al plano π . (0,8 puntos)
 c) Las ecuaciones de los planos que distan 3 unidades del plano π . (1,5 puntos)

Solución:

- a) Como la recta debe ser perpendicular al plano, el vector ortogonal del plano será director de la recta,

$$\vec{n}_{\pi} (8, -4, 1)$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta r serán,

$$r: \begin{cases} x = 1 + 8\lambda \\ y = -3 - 4\lambda \\ z = 7 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

La ecuación continua,

$$\frac{x-1}{8} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-7}{1}$$

A partir de esta ecuación obtenemos la de dos planos cuya intersección será la recta r ,

$$\begin{cases} \frac{x-1}{8} = \frac{y+3}{-4} \\ \frac{x-1}{8} = \frac{z-7}{1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x + 4 = 8y + 24 \\ x - 1 = 8z - 56 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x - 8y = 20 \\ x - 8z = -55 \end{cases}$$

La ecuación de la recta expresada como la intersección de dos planos es: (simplificamos la 1ª ecuación)

$$r: \begin{cases} x + 2y = -5 \\ x - 8z = -55 \end{cases}$$

b)

$$d(P, \pi) = \frac{|8 \cdot 1 - 4(-3) + 7 - 3|}{\sqrt{8^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{|8 + 12 + 7 - 3|}{\sqrt{64 + 16 + 1}} = \frac{24}{\sqrt{81}} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3} \text{ u.l.}$$

- c) Los planos que distan 3 unidades del plano π son paralelos a él, su ecuación general será de la forma:

$$8x - 4y + z = D$$

Como los dos planos son paralelos $d(\pi, \pi_1) = d(P_{\pi}, \pi_1)$

Busquemos un punto del plano π , $x = 0$, $y = 0$ luego $z = 3$

$$d(\pi, \pi_1) = d(P_{\pi}, \pi_1) = d((0, 0, 3), \pi_1) = \frac{|3 - D|}{\sqrt{64 + 16 + 1}} = \frac{|3 - D|}{\sqrt{81}} = \frac{|3 - D|}{9}$$

$$\text{Luego } 3 = \frac{|3 - D|}{9}$$

$$27 = |3 - D| \rightarrow \begin{cases} 3 - D = 27 \rightarrow D = -24 \\ 3 - D = -27 \rightarrow D = 30 \end{cases}$$

Por lo que hay dos planos que distan 3 unidades del plano π , son los planos $8x - 4y + z = -24$ y $8x - 4y + z = 30$

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Un agente comercial consigue, por término medio, vender sus productos al 40% de los clientes que visita. Selecciona al azar cinco de sus clientes para visitarlos cierto día. Averigua razonadamente:

- a) La probabilidad de que no venda sus productos a ninguno de esos cinco clientes. (1,1 puntos)
- b) La probabilidad de que venda sus productos sólo a dos de esos cinco clientes. (1,1 puntos)
- c) La probabilidad de que venda sus productos sólo a cuatro de esos cinco clientes. (1,1 puntos)

Solución:

Definimos la siguiente variable, X = número de clientes, de los cinco, a los que vende su producto.

X es una variable aleatoria binomial de parámetros $n = 5$ y $p = 0.4$. Es decir $X = B(5, 0.4)$

- a) Suceso A = no vende su producto a ninguno de esos cinco clientes,

$$P(A) = P(X = 0) = \binom{5}{0} 0.4^0 0.6^5 = 0.0776$$

- b) Suceso B = vende sus productos sólo a dos de esos cinco clientes,

$$P(B) = P(X = 2) = \binom{5}{2} 0.4^2 0.6^3 = \frac{5 \cdot 4}{2} 0.4^2 0.6^3 = 0.3456$$

- c) Suceso C = vende sus productos sólo a cuatro de esos cinco clientes,

$$P(C) = P(X = 4) = \binom{5}{4} 0.4^4 0.6^1 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} 0.4^4 0.6 = 0.0768$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. Calcular, razonadamente, el área de la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = \frac{2}{1+x^2}$

Solución:

Puntos de corte entre las dos curvas,

$$x^2 = \frac{2}{1+x^2}$$

$$x^2 + x^4 = 2$$

$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$

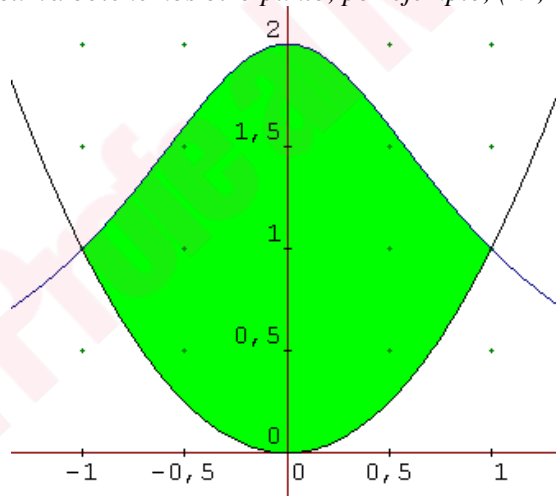
Resolvamos esta ecuación por Ruffini,

1	1	0	1	0	-2
1		1	1	2	2
	1	1	2	2	0
-1		-1	0	-2	
	1	0	2	0	

$$x^2 + 2 = 0 \quad \text{no tiene raíces reales}$$

Ambas curvas se cortan en los puntos $(1, 1)$ y $(-1, 1)$

$y = x^2$ es una parábola; de la otra curva obtenemos otro punto, por ejemplo, $(0, 2)$. La representación gráfica será:



El área de la región limitada por las dos curvas en la zona verde, la obtendremos a partir de la siguiente integral definida,

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{1+x^2} - x^2 \right) dx = \left[2 \operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \left[2 \operatorname{arctg} 1 - \frac{1^3}{3} \right] - \left[2 \operatorname{arctg} (-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right] = \\
 &= 2 \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} - 2 \left(-\frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} = \pi - \frac{2}{3} = 2,474926
 \end{aligned}$$

El área pedida es $\left(\pi - \frac{2}{3} \right)$ u.a.