

Modelo 1 de 2004

Estudio de funciones, áreas, sistemas y geometría del espacio.

Opción A - Ejercicio 1

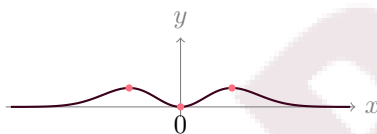
La función es polinómica multiplicada por una exponencial, por lo que su dominio es $\mathbb{R}$. Para estudiar las asíntotas en los extremos,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 e^{-x^2} = 0,$$

ya que la exponencial e^{x^2} crece más deprisa que cualquier potencia. Por tanto, $y = 0$ es asíntota horizontal en ambos extremos y no hay asíntotas verticales.

$$f'(x) = 2xe^{-x^2} - 2x^3 e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}(1 - x^2).$$

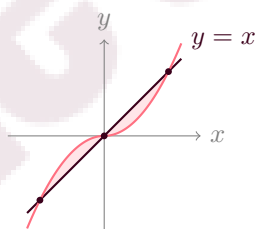
Como $e^{-x^2} > 0$, los puntos críticos son $x = -1, 0, 1$. El signo de f' es positivo en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$, y negativo en $(-1, 0)$ y $(1, +\infty)$. Así, f crece en los dos primeros intervalos y decrece en los otros dos. Tiene máximos relativos en $x = \pm 1$, ambos de valor $1/e$, y un mínimo relativo en $x = 0$, de valor 0.



Opción A - Ejercicio 2

Los cortes de $y = x|x|$ con la bisectriz $y = x$ satisfacen $x|x| = x$. Por tramos se obtienen $x = -1, 0, 1$, que delimitan dos recintos. En $[-1, 0]$ la recta queda por encima de la curva; en $[0, 1]$ ocurre lo contrario. Por tanto,

$$S = \int_{-1}^0 (x - (-x^2)) dx + \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}.$$



Opción A - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = -2\alpha.$$

Una solución única requiere $\det A \neq 0$, de donde $\alpha \neq 0$. Restando las dos primeras ecuaciones se obtiene $y = z$. La tercera da $2y = \alpha$, y al sustituir en la primera,

$$\boxed{(x, y, z) = \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} \right)}, \quad \alpha \neq 0.$$

Opción A - Ejercicio 4

La proyección ortogonal de $P = (1, 1, 1)$ sobre el plano $x + y + z = 1$ se obtiene restando una componente del vector normal $n = (1, 1, 1)$:

$$C = P - \frac{1+1+1-1}{1^2+1^2+1^2}n = (1, 1, 1) - \frac{2}{3}(1, 1, 1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados. Con $A = (0, 0, 1)$ y $B = (0, 1, 0)$,

$$\overrightarrow{AB} = (0, 1, -1), \quad \overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right),$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right), \quad S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Como $f''(x) = 3x^2$, integramos para recuperar f' y f :

$$f'(x) = x^3 + C_1, \quad f(x) = \frac{x^4}{4} + C_1x + C_2.$$

La tangente en $M = (0, 1)$ es paralela a $2x - y + 3 = 0$, cuya pendiente es 2. Así, $f'(0) = C_1 = 2$; además $f(0) = 1$ da $C_2 = 1$. Luego

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + 2x + 1.$$

Opción B - Ejercicio 2

El dominio es $\mathbb{R}$. La derivada

$$f'(x) = e^x - 4e^{-x} = e^{-x}(e^{2x} - 4)$$

se anula cuando $e^{2x} = 4$, es decir, en $x = \ln 2$. Es negativa antes y positiva después, de modo que f decrece en $(-\infty, \ln 2)$ y crece en $(\ln 2, +\infty)$. Al tender x a cualquiera de los extremos infinitos, $f(x) \rightarrow +\infty$, así que el mínimo absoluto es $f(\ln 2) = 4$. En $[0, 2]$, $f(x) > 0$; por ello el área pedida es la integral de f :

$$S = \int_0^2 (e^x + 4e^{-x}) dx = [e^x - 4e^{-x}]_0^2 = e^2 + 3 - 4e^{-2}.$$

Opción B - Ejercicio 3

Sea $D = -6$ el determinante dado.

- En (a), se multiplica la primera columna por 3 y la primera fila por -1 . El factor total es -3 , así que el determinante vale $-3D = \boxed{18}$.
- En (b), se intercambian las dos primeras columnas y luego la primera se multiplica por -2 . El factor total es $(-1)(-2) = 2$, así que el determinante vale $2D = \boxed{-12}$.
- En (c), la tercera fila es $2R_1 - R_3$. Por multilinealidad, el término con dos filas iguales se anula y queda $-D = \boxed{6}$.

Opción B - Ejercicio 4

Resolvemos las ecuaciones de r . De $2x - z = -4$ se obtiene $z = 2x + 4$; al sustituir en $x - 2y + z = 0$, resulta $y = (3x + 4)/2$. Tomando $x = 2t$,

$$r : (x, y, z) = (0, 2, 4) + t(2, 3, 4).$$

Un punto de r es $R(t) = (2t, 2 + 3t, 4 + 4t)$. La recta que une $A = (0, 1, -1)$ con $R(t)$ es paralela al plano π si su vector director es perpendicular al normal $n = (1, -2, -1)$:

$$(R(t) - A) \cdot n = (2t, 1 + 3t, 5 + 4t) \cdot (1, -2, -1) = -8t - 7 = 0.$$

Por tanto, $t = -7/8$ y $R = (-7/4, -5/8, 1/2)$. Un vector director de la recta pedida es $R - A = (-7/4, -13/8, 3/2)$, que podemos multiplicar por 8 para obtener $(-14, -13, 12)$. En efecto, $(-14, -13, 12) \cdot (1, -2, -1) = 0$. La recta, en forma paramétrica, queda

$$(x, y, z) = (0, 1, -1) + s(-14, -13, 12), \quad s \in \mathbb{R}.$$